2020/2021

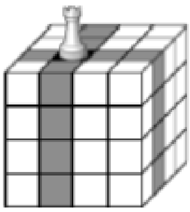
70. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh výberového sústredenia*

(*Sústredenie sa konalo 19. – 25. 4. 2021.*)

1. [A0] Nájdite všetky mnohočleny P s reálnymi koeficientami také, že pre každé reálne číslo x platí

$$(x+1)P(x-1) = (x-1)P(x).$$

2. [C0] Určte najväčší možný počet veží, ktoré je možné umiestniť na povrch šachovnicovej kocky rozmerov $100 \times 100 \times 100$, pričom žiadne dve veže sa neohrozujú. (Veža ohrozuje políčka nachádzajúce sa v rovnakom riadku alebo stĺpci, pričom tieto riadky a stĺpce pokračujú do všetkých stien, viď obr. 1.)



Obr. 1

3. [G0] Je daný ostrouhlý trojuholník ABC. Predpokladajme, že X a Y sú také body, že BX a CY sú dotyčnice kružnice opísanej ABC, $|AB| = |BX|$, $|AC| = |CY|$ a X, Y, A ležia v rovnakej polrovine vzhľadom na priamku BC. Dokážte, že ak I je stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC, tak $|\measuredangle BAC| + |\measuredangle XIY| = 180°$.

4. [N0] Nájdite všetky kladné celé čísla n s počtom kladných deliteľov rovným $\sqrt{n+1}$.

5. [A1] Nech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je postupnosť reálnych čísel spĺňajúcich $a_1+a_2+\cdots+a_n = 0$. Pre každé celé i spĺňajúce $1 \leqq i \leqq n$ označme $b_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$. Predpokladajme, že pre každé celé i spĺňajúce $1 \leqq i \leqq n-2$ platí $b_i(a_{i+2} - a_{i+1}) \geqq 0$. Dokážte, že

$$\max_{1\leqq l\leqq n} |a_l| \geqq \max_{1\leqq m\leqq n} |b_m|.$$

6. [N2] Pre každé prvočíslo p existuje kráľovstvo p-Landia obsahujúce p ostrovov očíslovaných $1, 2 \ldots, p$. Dva rôzne ostrovy s číslami m a n sú spojené mostom práve vtedy, keď p delí $(n^2 - m + 1)(m^2 - n + 1)$. Dokážte, že pre nekonečne veľa prvočísel p existujú dva ostrovy v p-Landii, ktoré nie sú spojené reťazcom mostov.

7. [C3] V rovine je daných 1000 bodov, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke. Pre každé tri z nich zapíšeme obsah trojuholníka nimi tvoreného. Dokážte, že k týmto číslam vieme zvoliť znamienka tak, aby ich súčet bol 0.

8. [C1] Nech n je kladné celé číslo. Nájdite počet permutácií $a_1, a_2, \dots, a_n$ čísel $1, 2, \dots, n$ takých, že platí

$$a_1 \leqq 2a_2 \leqq 3a_3 \leqq \dots \leqq na_n.$$

9. [A2] Predpokladajme, že kladné reálne čísla a, b, c, d spĺňajú $(a+c)(b+d) = ac+bd$. Nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}.$$

10. [G3] Body D, E, F sú päty výšok po rade z vrcholov A, B, C ostrouhlého trojuholníka ABC s ortocentrom H. Nech E' a F' sú postupne obrazy bodov E a F v osovej súmernosti podľa priamky AD. Predpokladajme, že priamky BF' a CE' sa pretínajú v bode X, zatiaľ čo priamky BE' a CF' sa pretínajú v bode Y. Dokážte, že priamky AX, YH a BC sa pretínajúce v jednom bode.

11. [N1] Je dané kladné celé číslo k. Dokážte, že existuje prvočíslo p také, že si vieme zvoliť po dvoch rôzne čísla $a_1, a_2, \dots, a_{k+3}$ z množiny $\{1, 2, \dots, p-1\}$ tak, že $p \mid$ $\mid a_i a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3} - i$ pre všetky $i = 1, 2, \dots, k$.

12. [G2] Je daný konvexný štvoruholník $ABCD$ spĺňajúci $|\measuredangle ABC| > 90°$, $|\measuredangle CDA| >$ $> 90°$, a $|\measuredangle DAB| = |\measuredangle BCD|$. Označme E a F obrazy bodu A v osovej súmernosti postupne podľa priamok BC a CD. Predpokladajme, že úsečky AE a AF pretínajú priamku BD po rade v bodoch K a L. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom BEK a DFL sa navzájom dotýkajú.

13. [A3] Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ také, že

$$f^{a^2+b^2}(a+b) = af(a) + bf(b) \qquad \text{pre každé } a, b \in \mathbb{Z}.$$

(Symbol f^n označuje n-tú iteráciu f, teda $f^0(x) = x$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ pre všetky celé $n \geqq 0$.)

14. [G1] Nech ABC je rovnoramenný trojuholník spĺňajúci $|BC| = |CA|$. Bod D je ľubovoľný bod vnútri úsečky AB taký, že $|AD| < |DB|$. Nech P a Q sú dva body postupne vnútri strán BC a AC spĺňajúce $|\measuredangle DPB| = |\measuredangle DQA| = 90°$. Predpokladajme, že os úsečky PQ pretína úsečku CQ vo vnútornom bode E, a že kružnice opísané trojuholníkom ABC a CPQ sa pretínajú v bode $F \neq C$. Dokážte, že ak body P, E, F ležia na jednej priamke, tak $|\measuredangle ACB| = 90°$.

15. [C2] Fibonacciho postupnosť $F_0, F_1, F_2, \dots$ je definovaná induktívne ako $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pre $n \geqq 1$. Pre každé celé číslo $n \geqq 2$ určte najmenšiu možnú veľkosť množiny S celých čísel takých, že pre každé $k = 2, 3, \dots, n$ existujú nejaké čísla $x, y \in S$ také, že $x - y = F_k$.

16. [N3] Nech $\mathcal{S}$ je n-prvková množina aspoň troch kladných celých čísel takých, že súčet žiadnych dvoch rôznych prvkov nie je rovný nijakému tretiemu. Dokážte, že prvky $\mathcal{S}$ vieme usporiadať ako $a_1, a_2, \dots, a_n$ tak, že pre každé $i = 2, 3, \dots, n-1$ platí, že a_i nedelí $a_{i-1} + a_{i+1}$.