MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie A

1 V nasledujúcich úlohách predpokladáme, že na párty sú aspoň dve osoby a známosti jej účastníkov sú vzájomné. To sa však netýka sympatií z návodnej úlohy N1 a doplňujúcej úlohy D1.

N1 Pri stole sedia traja chlapci a štyri dievčatá. Každému chlapcovi sa páčia tri dievčatá, každému dievčaťu len jeden chlapec. Existuje medzi nimi vždy dvojica opačného pohlavia, v ktorej sa obom páči ten druhý?

N2 Na párty sa každého z návštevníkov spýtame, koľko ostatných návštevníkov pozná. Ukážte, že ak ich odpovede sčítame, vyjde vždy párne číslo.

N3 Ukážte, že na každej párty možno nájsť aspoň dvoch účastníkov, ktorí tam majú rovnaký počet známych.

D1 Môže sa na párty zo súťažnej úlohy v prípade $k = 6$ stať, že bude existovať práve 20 párov, v ktorých sa obom páči ten druhý?

D2 Na párty sa každý účastník pozná práve s troma ďalšími. Ukážte, že počet účastníkov párty je párny. Ďalej uveďte príklady známostí na takých párty so 6, 8 a 2024 účastníkmi.

D3 V istom meste majú vybudovanú sieť na šírenie klebiet, v ktorej si každý klebetník vymieňa informácie s tromi klebetnicami a každá klebetnica si vymieňa informácie s tromi klebetníkmi. Inak sa klebety nešíria.

a) Dokážte, že klebetníkov a klebetníc je rovnako veľa.

b) Predpokladajme, že sieť na šírenie klebiet je súvislá (klebety od ľubovoľného klebetníka a ľubovoľnej klebetnice sa môžu dostať ku všetkým ostatným). Dokážte, že aj keď sa jeden klebetník z mesta odsťahuje, zostane sieť súvislá.

D4 Lukáš a Marek, ktorí sa poznajú, sa zišli na párty, na ktorej platilo: Ak majú niektorí dvaja účastníci rovnaký počet známych, tak nemajú žiadneho spoločného známeho. Dokážte, že na párty je niekto, kto tam má práve jedného známeho.

D5 V spoločnosti ľudí sú niektoré dvojice spriatelené. Pre kladné celé číslo k, kde $k \geq 3$, hovoríme, že spoločnosť je k-dobrá, ak možno každú k-ticu ľudí zo spoločnosti rozsadiť okolo okrúhleho stola tak, že sa každí dvaja susedia priatelia. Dokážte, že ak je spoločnosť 6-dobrá, tak je aj 7-dobrá.

D6 V skupine 90 detí má každé aspoň 30 kamarátov (kamarátstvo je vzájomné). Dokážte, že ich možno rozdeliť do troch 30-členných skupín tak, aby každé dieťa malo vo svojej skupine aspoň jedného kamaráta.

2

N1 Nájdite päťciferné čísla, z ktorých každé má päť rôznych nepárnych cifier, pritom súčet prvých troch cifier je 11 a súčet posledných troch cifier je 15.

N2 Určte najväčšie možné hodnoty nasledujúcich súčtov, v ktorých $(a_1, a_2, \dots, a_8, a_9)$ je ľubovoľné poradie cifier $(1, 2, \dots, 8, 9)$:

a) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$,

b) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + 2a_9$,

c) $a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + 2a_5 + 2a_6 + 2a_7 + 2a_8 + a_9$.

D1 Nájdite najväčšie možné šesťciferné číslo, ktorého každá cifra (počnúc treťou cifrou zľava) je súčtom predchádzajúcich dvoch.

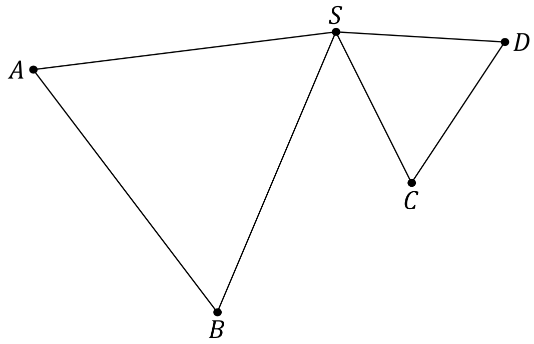
D2 Dané prirodzené číslo n má cifry, ktorých hodnoty sa zľava doprava zväčšujú. Ukážte, že ciferný súčet čísla $9n$ je vždy rovný 9.

D3 Nájdite najväčšie možné prirodzené číslo, ktorého každá cifra (okrem oboch krajných) je menšia ako aritmetický priemer susedných cifier.

---

3 Pri riešení návodných a dopĺňajúcich úloh je možné vhodne využiť *špirálovú podobnosť*. Tak nazývame podobné zobrazenia, ktoré sú výsledkom zloženia rovnoľahlosti a otočenia so spoločným stredom, ktorý potom nazývame *stred* tejto špirálovej podobnosti.

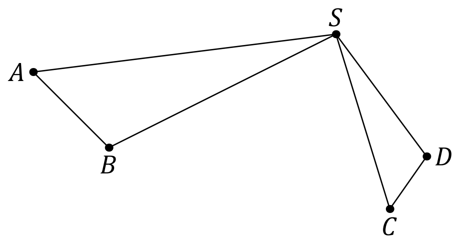
N1 Nech S, A, B, C, D sú rôzne body také, že trojuholníky SAB a SCD sú rovnostranné, pričom pri pohľade z bodu S sú body A, B, C, D práve takto usporiadané v kladnom smere:



a) Dokážte, že trojuholníky SAC a SBD sú zhodné.

b) Dokážte, že bod S a stredy úsečiek AC a BD sú vrcholmi rovnostranného trojuholníka.

N2 Nech S, A, B, C, D sú rôzne body také, že trojuholníky SAB a SCD sú pri tomto poradí vrcholov podobné, pričom pri pohľade z bodu S sú body A, B, C, D práve takto usporiadané v kladnom smere:



a) Dokážte, že trojuholníky SAC a SBD sú podobné.

b) Dokážte, že bod S a stredy úsečiek AC a BD sú vrcholmi trojuholníka, ktorý je podobný s trojuholníkmi SAB a SCD.

D1 Vo vnútri trojuholníka ABC ležia body D, E, F také, že trojuholníky BCD, CAE a ABF sú rovnostranné. Ukážte, že ťažisko týchto trojuholníkov tvorí rovnostranný trojuholník.

D2 Vnútri pravouhlého trojuholníka ABC s preponou AB a uhlom CAB veľkosti 60° existuje bod P taký, že $|\sphericalangle APB| = 120°$, $|BP| = 4$ a $|CP| = 1$. Určte dĺžku úsečky AP.

4

N1 Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel u a v takých, že u je deliteľom $2v$ a v je deliteľom $3u$.

N2 Ukážte, že pre žiadne nepárne prvočíslo p nie je číslo $1 + 2 + 3 + \cdots + p$ deliteľné žiadnym prvočíslom väčším ako p.

N3 Pre dané nepárne prvočíslo p označme S súčet všetkých prirodzených čísel menších ako p, ktoré majú vo svojich dekadických zápisoch aspoň jednu cifru z dekadického zápisu čísla p. Ukážte, že ak $p \mid S$, tak číslo S nemá okrem p žiadneho prvočiniteľa väčšieho ako $\frac{1}{2}(p-1)$.

D1 Ukážte, že súčet dvoch po sebe idúcich prvočísel nemôže byť dvojnásobok iného prvočísla.

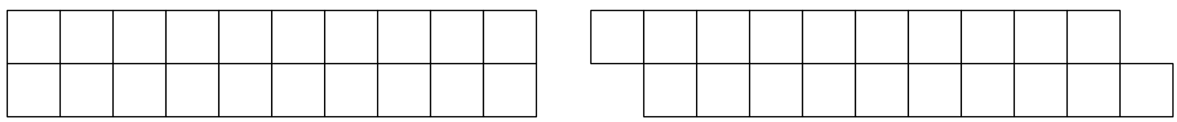
D2 Dokážte, že ak a, b, c sú kladné celé čísla také, že $a + b + c \mid abc$, tak $a + b + c$ je zložené číslo.

D3 Nech S_n je súčet prvých n prvočísel. Ukážte, že v intervale $[S_n, S_{n+1}]$ leží druhá mocnina niektorého prirodzeného čísla.

D4 Na tabuli sú napísané (nie nutne rôzne) prvočísla, ktorých súčin je 105-krát väčší ako ich súčet. Určte všetky napísané prvočísla, ak ich je a) 5, b) 7.

5

N1 Nájdite neprázdnu podmnožinu políčok tabuľky 20×20, ktorú je možné vyplniť (bezo zvyšku a prekrývania) ako kópiami ľavého útvaru, tak kópiami pravého útvaru.

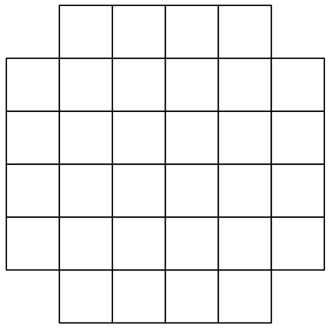


N2 Určte, koľko políčok obsahuje najmenšia plocha, ktorú je možné vyplniť

a) ako tetraminami typu I, tak aj tetraminami typu O a tiež aj tetraminami typu L;

b) ako tetraminami typu S, tak aj tetraminami typu T.

D1 Rozhodnite, či je možné tabuľku na obrázku vyplniť tetraminami typu L.



D2 Rozhodnite, či je možné tabuľku 10×10 vyplniť tetraminami typu T.

D3 Rozhodnite, či je možné tabuľku 10×10 vyplniť tetraminami typu I.

D4 Na niektoré políčko štvorcovej šachovnice $n \times n$, kde $n \geq 2$, postavíme figúrku a potom ju posúvame striedavo „šikmo“ a „priamo“. „Šikmo“ znamená na políčko, ktoré má s predchádzajúcim spoločný práve jeden bod. „Priamo“ znamená na susedné políčko, ktoré má s predchádzajúcim spoločnú stranu. Určte všetky n, pre ktoré existuje východiskové políčko a taká postupnosť ťahov začínajúca „šikmo“, že figúrka prejde celú šachovnicu $n \times n$ a na každom políčku sa ocitne práve raz.

D5 Nech n je celé číslo také, že $n \geq 3$. Uvažujme štvorčekový papier s rozmermi $n \times n$, ktorého jednotlivé štvorčeky môžu mať buď bielu, alebo čiernu farbu. V každom kroku zmeníme farby piatich štvorčekov, ktoré tvoria pentomino tvaru T v ľubovoľnom natočení. Na začiatku sú všetky štvorčeky biele. Rozhodnite, pre ktoré n možno po konečnom počte krokov dosiahnuť to, že všetky štvorčeky budú čierne.

6

N1 a) Pre ľubovoľné reálne čísla x, y, z dokážte $x^2 + y^2 + z^2 \geqq 2(x+y)z - 2xy$;

b) Pre ľubovoľné reálne čísla x a y dokážte $2 + x^2(1+y^2) \geq 2x(1+y)$.

N2 Reálne čísla a a b ležia v intervale $[1, 2]$. Ukážte, že platia nasledujúce nerovnosti:

a) $a^2 + b^2 \leq 1 + 2ab$,

b) $a^2 + b^2 \leq \frac{5}{2}ab$,

c) $2 \leq a/b + b/a \leq \frac{5}{2}$,

d) $a^2 + 2b^2 \leq (2a+1)b + 3$.

N3 Dokážte, že pre ľubovoľnú n-ticu kladných reálnych čísel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ platí

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Kedy nastane rovnosť?

N4 Nech $a_1, a_2, \dots, a_n$ sú kladné reálne čísla. Dokážte, že platí

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}},$$

t. j. že aritmetický priemer týchto čísel je aspoň taký ako ich harmonický priemer.

D1 Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b, c platí

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

D2 Pre ľubovoľné kladné reálne čísla x, y, z dokážte nerovnosť

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \leq m^2,$$

pričom

$$m = \min\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}, \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\right).$$

Zistite tiež, kedy v dokázanej nerovnosti nastane rovnosť.

D3 Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c z intervalu $[0, 1]$ platí

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \leq 2.$$

D4 Nech a a b sú reálne čísla také, že platí $9a^2 + 8ab + 7b^2 \leq 6$. Dokážte, že $7a + 5b + 12ab \leq 9$.

D5 Nech a, b, c, d sú kladné reálne čísla také, že $abcd = 4$ a $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10$. Určte najväčšiu možnú hodnotu výrazu $ab + bc + cd + da$.

D6 Nájdite najmenšie kladné reálne číslo t také, že ak reálne čísla a, b, c, d sú také, že $a + b + c + d = 6$ a $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10$, tak z nich možno vybrať dve, ktorých rozdiel má absolútnu hodnotu najviac t.

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie A

1 V nasledujúcich úlohách predpokladáme, že na párty sú aspoň dve osoby a známosti jej účastníkov sú vzájomné. To sa však netýka sympatií z návodnej úlohy N1 a doplňujúcej úlohy D1.

N1 Pri stole sedia traja chlapci a štyri dievčatá. Každému chlapcovi sa páčia tri dievčatá, každému dievčaťu len jeden chlapec. Existuje medzi nimi vždy dvojica opačného pohlavia, v ktorej sa obom páči ten druhý?

Riešenie:

Áno. Všetkých dvojíc je 12. Zvážte, v koľkých z nich sa chlapcovi páči dievča a v koľkých sa dievčaťu páči chlapec, alebo podľa celkového počtu chlapčenských sympatií dokážte, (použitím Dirichletovho princípu alebo sporom) že niektoré dievča sa páči všetkým trom chlapcom.

N2 Na párty sa každého z návštevníkov spýtame, koľko ostatných návštevníkov pozná. Ukážte, že ak ich odpovede sčítame, vyjde vždy párne číslo.

Riešenie:

Koľkokrát sme počítali každú známosť?

N3 Ukážte, že na každej párty možno nájsť aspoň dvoch účastníkov, ktorí tam majú rovnaký počet známych.

Riešenie:

Na párty s n účastníkmi je počet známych každého jedno z n čísel $0, 1, \dots, n-1$. Aspoň dva z týchto n počtov musia byť rovnaké, pretože je vylúčené, aby sa jeden počet rovnal číslu 0 a iný číslu $n-1$, teda rôznych počtov je najviac $n-1$.

D1 Môže sa na párty zo súťažnej úlohy v prípade $k = 6$ stať, že bude existovať práve 20 párov, v ktorých sa obom páči ten druhý?

Riešenie:

Áno. Popíšeme jeden z mnohých možných príkladov. Päť štvorčlenných skupín po 2 chlapcoch a 2 dievčatách rozostavme po obvode kruhu a vyberme „kladný“ smer jeho prechádzania. Predpokladajme, že každému chlapcovi sa páčia práve 2 dievčatá z jeho skupiny a ďalšie 4 dievčatá z dvoch skupín, ktoré sú od jeho skupiny najbližšie v kladnom smere, a že podobne každému dievčaťu sa páčia práve 2 chlapci z jej skupiny a ďalší 4 chlapci z dvoch skupín, ktoré sú od jej skupiny najbližšie v kladnom smere. Potom všetky páry so vzájomnými sympatiami sú časťami vytvorených piatich štvoríc a ich počet tak je $5 \cdot 2 \cdot 2$ čiže 20.

D2 Na párty sa každý účastník pozná práve s troma ďalšími. Ukážte, že počet účastníkov párty je párny. Ďalej uveďte príklady známostí na takých párty so 6, 8 a 2024 účastníkmi.

Riešenie:

Označte n počet účastníkov a uvážte, že dvojnásobok počtu všetkých známostí na párty je párne číslo $3n$. V prípade $n = 6$ si predstavte, že účastníci sú rozmiestnení na obvode kruhu a že sa poznajú práve tí, ktorí spolu nesusedia (možné sú aj iné príklady). V prípade $n \mod 4 = 0$ uvážte napríklad situáciu, keď účastníci sú rozdelení do štvoríc, pričom navzájom sa poznajú práve ľudia z rovnakej štvorice.

D3 V istom meste majú vybudovanú sieť na šírenie klebiet, v ktorej si každý klebetník vymieňa informácie s tromi klebetnicami a každá klebetnica si vymieňa informácie s tromi klebetníkmi. Inak sa klebety nešíria.

a) Dokážte, že klebetníkov a klebetníc je rovnako veľa.

b) Predpokladajme, že sieť na šírenie klebiet je súvislá (klebety od ľubovoľného klebetníka a ľubovoľnej klebetnice sa môžu dostať ku všetkým ostatným). Dokážte, že aj keď sa jeden klebetník z mesta odsťahuje, zostane sieť súvislá.

Riešenie:

61-B-I-5 (https://skmo.sk/dokument.php?id=452#page=5).

D4 Lukáš a Marek, ktorí sa poznajú, sa zišli na párty, na ktorej platilo: Ak majú niektorí dvaja účastníci rovnaký počet známych, tak nemajú žiadneho spoločného známeho. Dokážte, že na párty je niekto, kto tam má práve jedného známeho.

Riešenie:

Označme X jedného z tých účastníkov, ktorí na párty poznajú najviac, povedzme k osôb. Podľa zadania $k \geq 1$, v prípade $k = 1$ sme hotoví. Ak $k > 1$, žiadni dvaja z k známych vybraného X nemajú rovnaký počet známych, takže týchto k počtov tvorí celú množinu $\{1, 2, \dots, k\}$.

D5 V spoločnosti ľudí sú niektoré dvojice spriatelené. Pre kladné celé číslo k, kde $k \geq 3$, hovoríme, že spoločnosť je k-dobrá, ak možno každú k-ticu ľudí zo spoločnosti rozsadiť okolo okrúhleho stola tak, že sa každí dvaja susedia priatelia. Dokážte, že ak je spoločnosť 6-dobrá, tak je aj 7-dobrá.

Riešenie:

67-A-III-1 (https://skmo.sk/dokument.php?id=2726#page=2).

D6 V skupine 90 detí má každé aspoň 30 kamarátov (kamarátstvo je vzájomné). Dokážte, že ich možno rozdeliť do troch 30-členných skupín tak, aby každé dieťa malo vo svojej skupine aspoň jedného kamaráta.

Riešenie:

61-A-III-5 (https://skmo.sk/dokument.php?id=492#page=6).

2

N1 Nájdite päťciferné čísla, z ktorých každé má päť rôznych nepárnych cifier, pritom súčet prvých troch cifier je 11 a súčet posledných troch cifier je 15.

Riešenie:

Prostredná cifra musí byť 1, pretože $11 + 15$ je o 1 viac ako $1 + 3 + 5 + 7 + 9$. Na prvých dvoch miestach potom musia byť 3 a 7, na posledných dvoch 9 a 5. Všetky takéto čísla 37159, 37195, 73159, 73195 vyhovujú.

N2 Určte najväčšie možné hodnoty nasledujúcich súčtov, v ktorých $(a_1, a_2, \dots, a_8, a_9)$ je ľubovoľné poradie cifier $(1, 2, \dots, 8, 9)$:

a) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$,

b) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + 2a_9$,

c) $a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + 2a_5 + 2a_6 + 2a_7 + 2a_8 + a_9$.

Riešenie:

a) $45 - 1$ čiže 44.

b) $45 + 9$ čiže 54.

c) $2 \cdot 45 - (1 + 2)$ čiže 87.

D1 Nájdite najväčšie možné šesťciferné číslo, ktorého každá cifra (počnúc treťou cifrou zľava) je súčtom predchádzajúcich dvoch.

Riešenie:

303 369. Cifry zľava doprava sú a, b, $a + b$, $a + 2b$, $2a + 3b$ a $3a + 5b$. Z nerovnosti $3a + 5b \leq 9$ vyplýva $a \leq 3$, pritom v prípade $a = 3$ platí $b = 0$.

D2 Dané prirodzené číslo n má cifry, ktorých hodnoty sa zľava doprava zväčšujú. Ukážte, že ciferný súčet čísla $9n$ je vždy rovný 9.

Riešenie:

Ak má dané n cifry $c_1, c_2, \dots, c_k$, kde $c_1 < c_2 < \cdots < c_k$, sú cifry čísla $10n - n$ podľa písomného algoritmu na odčítanie zľava doprava c_1, $c_2 - c_1$, …, $c_{k-1} - c_{k-2}$, $c_k - (c_{k-1} + 1)$, $10 - c_k$. Ich súčet je naozaj 9.

D3 Nájdite najväčšie možné prirodzené číslo, ktorého každá cifra (okrem oboch krajných) je menšia ako aritmetický priemer susedných cifier.

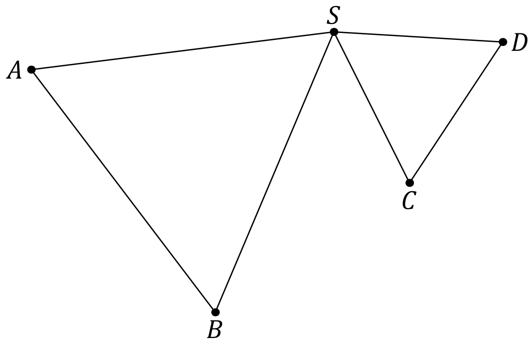
Riešenie:

96 433 469. Číslo so zápisom $\overline{c_1 c_2 \dots c_n}$, kde $n \geq 3$, vyhovuje zadaniu práve vtedy, keď pre každé prípustné i platí $c_{i+1} - c_i > c_i - c_{i-1}$. Hľadáme tak najväčšie číslo, pre ktoré je zodpovedajúca postupnosť rozdielov $c_2 - c_1, c_3 - c_2, \dots, c_n - c_{n-1}$ rastúca. Nech je prvých k rozdielov záporných a posledných $n - 1 - k$ rozdielov nezáporných. Pre ich súčty platí $c_{k+1} - c_1 \geq -9$ a $c_n - c_{k+1} \leq 9$. Odtiaľ s ohľadom na vzťah $1 + 2 + 3 + 4 > 9$ vyplýva, že $k \leq 3$ a $n - 1 - k \leq 4$ (je možný aj rozdiel 0), čiže $n - k \leq 5$. Preto $n = k + (n - k) \leq 8$. Ukážme, že ak $n = 8$ (vtedy nutne $k = 3$), tak vyhovujúce číslo existuje. Keďže hľadáme najväčšie také, nech $c_1 = 9$ (c_1 je možné vždy zväčšiť). Potom však zo vzťahov $c_1 = 9$ a $k = 3$ vyplýva, že $c_2 - c_1 \leq -3$, čiže $c_2 \leq 6$, pritom v prípade $c_2 = 6$ platí $c_3 - c_2 = -2$ a $c_4 - c_1 = -1$, takže potom štvorčíslie $c_1 c_2 c_3 c_4$ je 9643. Z podmienky nezápornosti čísla $c_5 - c_4$ v prípade $c_4 = 3$ však vyplýva, že jediné vyhovujúce štvorčíslie $c_5 c_6 c_7 c_8$ je 3469.

---

3 Pri riešení návodných a doplňajúcich úloh je možné vhodne využiť *špirálovú podobnosť*. Tak nazývame podobné zobrazenia, ktoré sú výsledkom zloženia rovnoľahlosti a otočenia so spoločným stredom, ktorý potom nazývame *stred* tejto špirálovej podobnosti.

N1 Nech S, A, B, C, D sú rôzne body také, že trojuholníky SAB a SCD sú rovnostranné, pričom pri pohľade z bodu S sú body A, B, C, D práve takto usporiadané v kladnom smere:



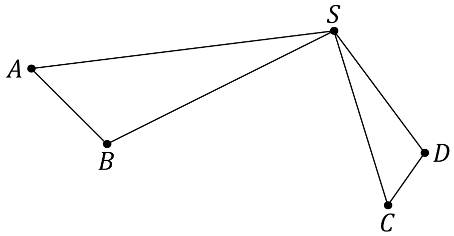
a) Dokážte, že trojuholníky SAC a SBD sú zhodné.

b) Dokážte, že bod S a stredy úsečiek AC a BD sú vrcholmi rovnostranného trojuholníka.

Riešenie:

Uvažujte otočenie so stredom S a uhlom $60°$. Čo je obrazom úsečky AC? Čo je obrazom jej stredu?

N2 Nech S, A, B, C, D sú rôzne body také, že trojuholníky SAB a SCD sú pri tomto poradí vrcholov podobné, pričom pri pohľade z bodu S sú body A, B, C, D práve takto usporiadané v kladnom smere:



a) Dokážte, že trojuholníky SAC a SBD sú podobné.

b) Dokážte, že bod S a stredy úsečiek AC a BD sú vrcholmi trojuholníka, ktorý je podobný s trojuholníkmi SAB a SCD.

Riešenie:

Uvažujte špirálovú podobnosť so stredom S, ktoré zobrazí A na B, a teda aj C na D. Potom vykonajte analogické úvahy ako pri riešení úlohy N1.

D1 Vo vnútri trojuholníka ABC ležia body D, E, F také, že trojuholníky BCD, CAE a ABF sú rovnostranné. Ukážte, že ťažisko týchto trojuholníkov tvorí rovnostranný trojuholník.

Riešenie:

Označte spomínané ťažiská postupne A_1, B_1, C_1 a uvažujte špirálovú podobnosť so stredom v C, ktorá zobrazuje B_1 na A, a teda aj A_1 na D. Pre úsečku B_1A_1 a jej obraz AD potom platí $|AD| = \sqrt{3}\,|B_1A_1|$. Analogickými úvahami odvodíme nielen $|BE| = \sqrt{3}\,|C_1B_1|$ a $|CF| = \sqrt{3}\,|A_1C_1|$, ale aj $|BE| = \sqrt{3}\,|A_1B_1|$, $|CF| = \sqrt{3}\,|B_1C_1|$ a $|AD| = \sqrt{3}\,|C_1A_1|$. Odtiaľ už vyplýva $|A_1B_1| = |A_1C_1| = |B_1C_1|$.

D2 Vnútri pravouhlého trojuholníka ABC s preponou AB a uhlom CAB veľkosti $60°$ existuje bod P taký, že $|\sphericalangle APB| = 120°$, $|BP| = 4$ a $|CP| = 1$. Určte dĺžku úsečky AP.

Riešenie:

$|AP| = 2$. Uvažujte špirálovú podobnosť so stredom v bode A, ktorá zobrazí C na B. Obraz bodu P označte P'. Koeficient tejto podobnosti je $|BA| / |CA|$ čiže $1/\cos 60°$, čo je 2, teda BP' je obraz úsečky CP s dĺžkou 1, takže $|BP'| = 2$. Ďalej z podobnosti trojuholníkov ABC a $AP'P$ pri tomto poradí vrcholov (podľa vety *sus*) vyplýva $|\sphericalangle AP'P| = 30°$ a $|\sphericalangle APP'| = 90°$, teda $|\sphericalangle P'PB| = |\sphericalangle APB| - |\sphericalangle APP'| = 30°$, čo spolu so vzťahmi $|BP| = 4$ a $|BP'| = 2$ dáva $|\sphericalangle BP'P| = 90°$. Priečka PP' tak zviera zhodné striedavé uhly ako s priamkami AP a $P'B$, tak s priamkami AP' a BP. Štvoruholník $APBP'$ je preto rovnobežník, odkiaľ $|AP| = |BP'| = 2$.

4

N1 Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel u a v takých, že u je deliteľom $2v$ a v je deliteľom $3u$.

Riešenie:

Existujú kladné celé čísla a, b také, že $2v = au$ a $3u = bv$. Vynásobením dostaneme $6vu = abuv$, čiže $ab = 6$, preto (a, b) je jedna z dvojíc $(1, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(6, 1)$. Požadované rovnosti $2v = au$ a $3u = bv$

sa potom postupne redukujú na $u = 2v$, $u = v$, $u = \frac{2}{3}v$, $u = \frac{1}{3}v$. Vyhovujú teda práve dvojice (u, v) tvarov $(2n, n)$, (n, n), $(2n, 3n)$, $(n, 3n)$, kde n je kladné celé číslo.

N2 Ukážte, že pre žiadne nepárne prvočíslo p nie je číslo $1 + 2 + 3 + \cdots + p$ deliteľné žiadnym prvočíslom väčším ako p.

Riešenie:

Tento súčet je $\frac{1}{2}p(p + 1)$, teda každý jeho prvočiniteľ q delí niektoré z čísel p alebo $p + 1$, a preto $q \le p$. Prvočíslo p je nepárne, a tak párne číslo $p + 1$ je aspoň 4, a je teda zložené.

N3 Pre dané nepárne prvočíslo p označme S súčet všetkých prirodzených čísel menších ako p, ktoré majú vo svojich dekadických zápisoch aspoň jednu cifru z dekadického zápisu čísla p. Ukážte, že ak $p \mid S$, tak číslo S nemá okrem p žiadneho prvočiniteľa väčšieho ako $\frac{1}{2}(p - 1)$.

Riešenie:

Zrejme $S \le 1 + 2 + \cdots + (p - 1) = \frac{1}{2}p(p - 1)$, odkiaľ $S/p \le \frac{1}{2}(p - 1)$, kde S/p je kladné celé číslo vďaka predpokladu $p \mid S$. Preto ak je q nejaký prvočiniteľ čísla S rôzny od p, je aj prvočiniteľom čísla S/p, ktoré samo, ako vieme, neprevyšuje $\frac{1}{2}(p - 1)$.

D1 Ukážte, že súčet dvoch po sebe idúcich prvočísel nemôže byť dvojnásobok iného prvočísla.

Riešenie:

Tvrdenie dokážeme sporom: Neh p a r sú po sebe idúce prvočísla. Nech q je prvočíslo také, že $p + r = 2q$, t. j. $\frac{1}{2}(p + r) = q$. Číslo q teda leží vo vnútri otvoreného intervalu (p, r), v ktorom však nie sú žiadne prvočísla.

D2 Dokážte, že ak a, b, c sú kladné celé čísla také, že $a + b + c \mid abc$, tak $a + b + c$ je zložené číslo.

Riešenie:

Tvrdenie dokážeme sporom: Ak by číslo $a+b+c$ bolo prvočíslo, bolo by (vďaka zadanej podmienke $a+b+c \mid abc$) deliteľom aspoň jedného z čísel a, b, c. Tie sú však všetky menšie ako $a + b + c$, čo je spor.

D3 Nech S_n je súčet prvých n prvočísel. Ukážte, že v intervale $[S_n, S_{n+1}]$ leží druhá mocnina niektorého prirodzeného čísla.

Riešenie:

Ukážme najprv, že na to, aby vo všeobecnejšom intervale $[S, S + (2k + 1)]$, kde S a k sú prirodzené čísla, ležala druhá mocnina, stačí, aby platilo $S \le (k + 1)^2$. Ak totiž v $[S, S + (2k + 1)]$ neleží žiadne z čísel 1^2, 2^2, ..., k^2, tak $k^2 < S \le (k + 1)^2$, a teda v danom intervale leží číslo $(k + 1)^2$.

Pri zrejmom označení tak v našej úlohe stačí pre každé n dokázať nerovnosť $p_1 + \cdots + p_n \le \frac{1}{4}(p_{n+1} + 1)^2$ (podľa predchádzajúceho tvrdenia v prípade $k = \frac{1}{2}(p_{n+1} - 1)$). Keďže $p_1 - 1$, p_2, p_3, ..., p_n sú rôzne čísla z množiny nepárnych čísel $\{1, 3, 5, \ldots, p_{n+1} - 2\}$ so súčtom $\frac{1}{4}(p_{n+1} - 1)^2$, stačí dokázať, že $1 + \frac{1}{4}(p_{n+1} - 1)^2 \le \frac{1}{4}(p_{n+1} + 1)^2$. To je ale zrejmé, pretože celé číslo $\frac{1}{4}(p_{n+1} - 1)^2$ je menšie ako celé číslo $\frac{1}{4}(p_{n+1} + 1)^2$.

D4 Na tabuli sú napísané (nie nutne rôzne) prvočísla, ktorých súčin je 105-krát väčší ako ich súčet. Určte všetky napísané prvočísla, ak ich je a) 5, b) 7.

Riešenie:

70-A-I-1 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3467).

5

N1 Nájdite neprázdnu podmnožinu políčok tabuľky 20×20, ktorú je možné vyplniť (bezo zvyšku a prekrývania) ako kópiami ľavého útvaru, tak kópiami pravého útvaru.

Riešenie:

Použite každý útvar štyrikrát „dookola“.

N2 Určte, koľko políčok obsahuje najmenšia plocha, ktorú je možné vyplniť

a) ako tetraminami typu I, tak aj tetraminami typu O a tiež aj tetraminami typu L;

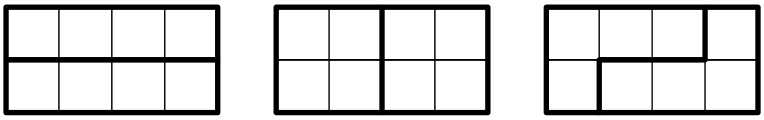
b) ako tetraminami typu S, tak aj tetraminami typu T.

Riešenie:

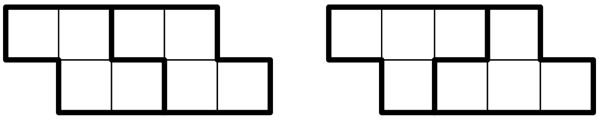
8 políčok pre obe úlohy. Každá vyhovujúca plocha musí zložená z aspoň dvoch kópií každého zo spomínaných

tetramín, a mať tak aspoň 8 políčok. Možné príklady plôch s 8 políčkami aj s požadovanými vyplneniami:

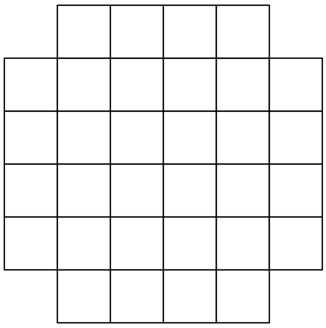
a)



b)



D1 Rozhodnite, či je možné tabuľku na obrázku vyplniť tetraminami typu L.



Riešenie:

Dá sa to. Dokonca je možné bez presahu vyplniť „polovicu" tabuľky, rozdelenej jej zvislou (alebo vodorovnou) osou súmernosti.

D2 Rozhodnite, či je možné tabuľku 10×10 vyplniť tetraminami typu T.

Riešenie:

Nejde to. Ofarbite tabuľku bielymi a čiernymi políčkami ako šachovnicu. Potom každé tetramino typu T pokrýva nepárny počet čiernych políčok. Pri vyplnení 25 tetraminami typu T by celkový počet pokrytých čiernych políčok bol nepárny.

D3 Rozhodnite, či je možné tabuľku 10×10 vyplniť tetraminami typu I.

Riešenie:

Nejde to. Uvažujte „hrubšie" šachovnicové zafarbenie, keď jednofarebné štvorce majú veľkosť 2×2. Koľko čiernych políčok potom pokryje jedno tetramino typu I, koľko by ich bolo pokrytých pri vyplnení jeho 25 kópiami?

D4 Na niektoré políčko štvorcovej šachovnice $n \times n$, kde $n \geq 2$, postavíme figúrku a potom ju posúvame striedavo „šikmo" a „priamo". „Šikmo" znamená na políčko, ktoré má s predchádzajúcim spoločný práve jeden bod. „Priamo" znamená na susedné políčko, ktoré má s predchádzajúcim spoločnú stranu. Určte všetky n, pre ktoré existuje východiskové políčko a taká postupnosť ťahov začínajúca „šikmo", že figúrka prejde celú šachovnicu $n \times n$ a na každom políčku sa ocitne práve raz.

Riešenie:

56-A-III-1 (https://skmo.sk/dokument.php?id=225).

D5 Nech n je celé číslo také, že $n \geq 3$. Uvažujme štvorčekový papier s rozmermi $n \times n$, ktorého jednotlivé štvorčeky môžu mať buď bielu, alebo čiernu farbu. V každom kroku zmeníme farby piatich štvorčekov, ktoré tvoria pentomino tvaru T v ľubovoľnom natočení. Na začiatku sú všetky štvorčeky biele. Rozhodnite, pre ktoré n možno po konečnom počte krokov dosiahnuť to, že všetky štvorčeky budú čierne.

Riešenie:

72-A-III-6 (https://skmo.sk/dokument.php?id=4440#page=5).

6

N1 a) Pre ľubovoľné reálne čísla x, y, z dokážte $x^2 + y^2 + z^2 \geqq 2(x+y)z - 2xy$;

b) Pre ľubovoľné reálne čísla x a y dokážte $2 + x^2(1+y^2) \geq 2x(1+y)$.

Riešenie:

Nerovnosť z a) upravte na $(x+y-z)^2 \geq 0$, z b) na $(xy-1)^2+(x-1)^2 \geq 0$.

N2 Reálne čísla a a b ležia v intervale $[1,2]$. Ukážte, že platia nasledujúce nerovnosti:

a) $a^2+b^2 \leq 1+2ab$,

b) $a^2+b^2 \leq \frac{5}{2}ab$,

c) $2 \leq a/b+b/a \leq \frac{5}{2}$,

d) $a^2+2b^2 \leq (2a+1)b+3$.

Riešenie:

Nerovnosť z a) upravte na $(a-b)^2 \leq 1$, nerovnosť z b) na $(2a-b)\cdot(2b-a) \geq 0$. Ľavá nerovnosť z c) platí pre ľubovoľné kladné a a b a možno ju dokázať napríklad úpravou na $(a-b)^2 \geq 0$ alebo použitím A-G nerovnosti pre dve čísla a/b a b/a. Pravá nerovnosť z c) vyplýva z b). Nerovnosť z d) upravte na $(a-b)^2+(b-\frac{1}{2})^2 \leq \frac{13}{4}$ a využite to, že $|a-b| \leq 1$ a $0 < b-\frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}$.

N3 Dokážte, že pre ľubovoľnú n-ticu kladných reálnych čísel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ platí

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Kedy nastane rovnosť?

Riešenie:

Po roznásobení dostanete n jednotiek a $n(n-1)/2$ dvojíc zlomkov a_i/a_j a a_j/a_i, kde $1 \leq i < j \leq n$, pritom súčet každých dvoch takých zlomkov je aspoň 2 podľa riešenia časti c) z úlohy N2. Rovnosť nastane práve vtedy, keď platí $a_i/a_j = a_j/a_i$, teda práve vtedy, keď všetky čísla a_i sú rovnaké.

N4 Nech a_1, a_2, ..., a_n sú kladné reálne čísla. Dokážte, že platí

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}},$$

t. j. že aritmetický priemer týchto čísel je aspoň taký ako ich harmonický priemer.

Riešenie:

Upravte na nerovnosť z N3.

D1 Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b, c platí

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Riešenie:

Pričítajte ku každému zlomku 1 a použite N3 pre trojicu $(b+c, c+a, a+b)$.

D2 Pre ľubovoľné kladné reálne čísla x, y, z dokážte nerovnosť

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \leq m^2,$$

pričom

$$m = \min\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}, \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right).$$

Zistite tiež, kedy v dokázanej nerovnosti nastane rovnosť.

Riešenie:

63-A-I-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=992#page=2).

D3 Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c z intervalu $[0,1]$ platí

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab} \leq 2.$$

Riešenie:

Vzhľadom na symetriu môžeme predpokladať, že $a \geq \max(b,c)$. Prvý zlomok je zrejme najviac 1. Druhý zlomok je najviac $b/(a+c)$, pretože z nerovnosti $(1-a)(1-c) \geq 0$ vyplýva $1+ca \geq a+c$. Podobne tretí zlomok je najviac $c/(a+b)$. Stačí tak dokázať, že súčet $b/(a+c)+c/(a+b)$ je najviac 1. To však vďaka predpokladu $a \geq \max(b,c)$ platí, lebo potom $b/(a+c) \leq b/(b+c)$ a $c/(a+b) \leq c/(b+c)$.

D4 Nech a a b sú reálne čísla také, že platí $9a^2 + 8ab + 7b^2 \leq 6$. Dokážte, že $7a + 5b + 12ab \leq 9$.

Riešenie:

Všimnime si, že v oboch uvedených nerovnostiach nastáva rovnosť v prípade $a = b = \frac{1}{2}$. Uplatnime preto odhad $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ v tvare $a \leq a^2 + \frac{1}{4}$ a jeho obdobu $b \leq b^2 + \frac{1}{4}$. Dostaneme

$$7a + 5b + 12ab \leq 7\left(a^2 + \frac{1}{4}\right) + 5\left(b^2 + \frac{1}{4}\right) + 12ab,$$

pritom výraz napravo je $\left(9a^2 + 8ab + 7b^2\right) - 2(a - b)^2 + 3$.

D5 Nech a, b, c, d sú kladné reálne čísla také, že $abcd = 4$ a $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10$. Určte najväčšiu možnú hodnotu výrazu $ab + bc + cd + da$.

Riešenie:

https://skmo.sk/dokument.php?id=994#page=9.

D6 Nájdite najmenšie kladné reálne číslo t také, že ak reálne čísla a, b, c, d sú také, že $a + b + c + d = 6$ a $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 10$, tak z nich možno vybrať dve, ktorých rozdiel má absolútnu hodnotu najviac t.

Riešenie:

https://iksko.org/files/1/vzorak1.pdf#page=1.