MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie B

1

N1 Dokážet, že pre každé prirodzené číslo n je počet všetkých podmnožín n-prvkovej množiny 2^n.

N2 Koľko neprázdnych podmnožín množiny $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ má párny súčet prvkov?

N3 Koľkými spôsobmi je možné z množiny $\{1, 2, \dots, 9\}$ vybrať dve čísla so súčtom deliteľným 3?

D1 Označme M počet všetkých možných vyplnení tabuľky 3×3 navzájom rôznymi prirodzenými číslami od 1 do 9. Ďalej označme N počet tých vyplnení, kde sú navyše súčty všetkých čísel v každom riadku aj stĺpci nepárne čísla. Určte pomer $N : M$.

D2 Označme M počet všetkých možných vyplnení tabuľky 3×3 navzájom rôznymi prirodzenými číslami od 1 do 9. Ďalej označme D počet tých vyplnení, keď je navyše *súčin* čísel v niektorom riadku alebo stĺpci násobkom 10. Určte pomer $D : M$.

D3 Koľko 33-ciferných čísel deliteľných 3 neobsahuje vo svojom zápise cifru 3? Výsledok zapíšte v tvare súčinu mocnín prvočísel.

D4 Zovšeobecnenie úlohy N2:

Určte počet neprázdnych podmnožín množiny $\{0, 1, \dots, 2n-1\}$ s párnym súčtom prvkov, kde n je dané kladné prirodzené číslo.

D5 Zovšeobecnenie súťažnej úlohy:

Pre každé prirodzené k označme $p(k)$ počet tých podmnožín množiny $\{0, 1, \dots, 3k\}$, ktoré majú súčet prvkov deliteľný 3 (započítame medzi ne aj prázdnu množinu). Dokážte, že $p(k) = \frac{1}{3}\left(2^{2k} + 2\right) \cdot 2^{k+1}$.

2

N1 Pre reálne čísla a a b platí $a/(b+1) = b/(a+1)$. Dokážte, že $a = b$ alebo $a + b = -1$.

N2 Pre reálne čísla a, b, c platí $a/b = b/c = c/a$. Určte všetky možné hodnoty súčtu $a/(b+c) + b/(c+a) + c/(a+b)$.

D1 Určte, aké hodnoty môže nadobúdať výraz

$$\frac{a+bc}{a+b} + \frac{b+ca}{b+c} + \frac{c+ab}{c+a},$$

ak sú a, b, c kladné reálne čísla so súčtom 1.

D2 Nech a, b, c sú kladné reálne čísla také, že $ab + bc + ca = 1$. Určte, aké hodnoty nadobúda výraz

$$\frac{a(b^2+1)}{a+b} + \frac{b(c^2+1)}{b+c} + \frac{c(a^2+1)}{c+a}.$$

D3 Nech x, y, z sú kladné reálne čísla, ktorých súčin je rovný 1. Dokážte, že platí

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1.$$

D4 Pre reálne čísla x, y, z platí $|x+y| = 1 - z$, $|y+z| = 1 - x$, $|z+x| = 1 - y$. Zistite, aké hodnoty môže nadobúdať $x + y + z$. Pre každý vyhovujúci súčet uveďte príklad prislúchajúcich čísel x, y, z.

D4 Pre reálne čísla a, b, c platí $a + b + c = 0$ a $a^3 + b^3 + c^3 = 0$. Nájdite všetky možné hodnoty abc.

D5 Nájdite všetky reálne riešenia sústavy rovníc

$$\frac{1}{x+y} + z = 1,$$

$$\frac{1}{y+z} + x = 1,$$

$$\frac{1}{z+x} + y = 1.$$

D6 Pre nenulové reálne čísla a, b, c platí $a^2 - b^2 = bc$ a $b^2 - c^2 = ca$. Ukážte, že potom $a^2 - c^2 = ab$.

---

3 Pripomeňme, že konvexný štvoruholník $ABCD$ je tetivový práve vtedy, keď platí ktorákoľvek z podmienok:

- Súčet niektorých dvoch jeho protiľahlých vnútorných uhlov je 180°, napríklad týchto pri vrcholoch B a D: $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA| = 180°$. (Vtedy na tetivovosť akéhokoľvek štvoruholníka $ABCD$ stačí, aby body B a D ležali vo vnútri opačných polrovín s hraničnou priamkou AC.)
- Uhly „nad" niektorou jeho stranou sú zhodné, napríklad nad stranou AB ide o uhly s vrcholmi C a D: $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$. (Vtedy na tetivovosť akéhokoľvek štvoruholníka $ABCD$ či $ABDC$ stačí, aby body C a D ležali vo vnútri rovnakej polroviny s hraničnou priamkou AB.)

Pri riešení úloh často najprv použitím jednej z týchto podmienok tetivovosť niektorého konvexného štvoruholníka dokážeme a potom vhodne využijeme platnosť druhej podmienky.

N1 V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ platí rovnosť $|\sphericalangle BAD| = 42°$, $|\sphericalangle ABC| = 79°$, $|\sphericalangle DCB| = 138°$ a $|\sphericalangle BDC| = 25°$. Určte $|\sphericalangle ACB|$.

N2 Je daný ostrouhlý trojuholník ABC s výškami AD a BE. (Ako zvyčajne, *výškou trojuholníka* rozumieme *úsečku*, ktorú popisujeme jej krajnými bodmi.) Dokážte, že stred kružnice opísanej trojuholníku CDE leží na výške trojuholníka ABC z vrcholu C.

N3 Je daný ostrouhlý trojuholník ABC s výškami AD, BE a CF. Dokážte, že tieto výšky rozpoľujú vnútorné uhly trojuholníka DEF.

D1 Sú dané dva tetivové štvoruholníky $ABXY$ a $CDYX$, pritom ich spoločné vrcholy X a Y ležia postupne na úsečkách AC a BD. Dokážte, že platí $AB \parallel CD$.

D2 Nech D je vnútorný bod prepony AB pravouhlého trojuholníka ABC. Označme X a Y stredy kružníc opísaných postupne trojuholníkom ADC a CDB. Ukážte, že body C, D, X a Y ležia na jednej kružnici.

D3 Je daný ostrouhlý trojuholník ABC. Dotyčnice v bodoch A a B ku kružnici tomuto trojuholníku opísanej sa pretínajú v bode T. Predpokladajme, že priamka rovnobežná so stranou AC, ktorá prechádza bodom T, pretína stranu BC v bode D. Ukážte, že $|AD| = |CD|$.

D4 Nech AC je priemer kružnice opísanej tetivovému štvoruholníku $ABCD$. Predpokladajme, že na polpriamkach opačných k polpriamkam AD a DC existujú postupne body $A' \neq A$ a $C' \neq D$ také, že platí $|AB| = |A'B|$ a $|BC| = |BC'|$. Dokážte tvrdenia:

a) Body A', B, C' a D ležia na jednej kružnici k.

b) Ak je O stred kružnice k a O_A a O_C sú postupne stredy kružníc opísaných trojuholníkom $AA'B$, resp. $CC'B$, tak platí $OO_A \perp OO_C$.

D5 Na stranách AB a BC daného trojuholníka ABC ležia postupne také body D a E, že $|BD| = |DC| = |CA|$ a $|EC| = |ED|$. Dokážte, že $|AE| = |BE|$.

D6 Daný je pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. Nech D je ľubovoľný vnútorný bod odvesny AC a p kolmica z bodu D na preponu AB. Označme E, kde $E \neq D$, bod priamky p taký, že body A, B, D, E ležia na kružnici. Označme ešte F priesečník priamok p a BC. Dokážte, že $|AE| = |AF|$.

D7 Daný je rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB a bod P vnútri jeho výšky z vrcholu C. Priamka AP pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bode Q, kde $Q \neq A$. Rovnobežka so základňou AB vedená bodom P pretína rameno BC v bode R. Dokážte, že polpriamka QR je osou uhla AQB.

4

N1 Pre celé čísla n, a, b platí $n \mid a$ a $n \mid b$. Dokážte, že potom pre ľubovoľné celé čísla k, l platí $n \mid ka + lb$ (špeciálne napríklad $n \mid a + b$ a $n \mid a - b$).

N2 Pre ktoré prirodzené čísla n je zaručené, že celé čísla u, v spĺňajúce obe podmienky $n \mid u + v$ a $n \mid u - v$ sú samy deliteľné číslom n?

N3 Ukážte, že ak pre kladné prirodzené čísla a a b platí $a \mid b$ a $b \mid a$, tak $a = b$.

N4 Ukážte, že ak pre rôzne kladné prirodzené čísla u a v platí $u \mid v$, tak $2u \leq v$.

D1 Pre kladné prirodzené čísla a a b platí $a \mid 9b$ a $b \mid 9a$. Určte všetky možné hodnoty podielu a/b.

D2 V školskej záhrade hrá skupina žiakov hru zvanú molekuly. Učiteľ im najprv prikázal, aby sa rozdelili do trojíc. Jeden žiak zvýšil, a tak z ďalšej hry vypadol. Zvyšní žáci sa potom mali rozdeliť do štvoríc. Opäť jeden žiak zvýšil a vypadol. Potom sa zvyšní žiaci mali rozdeliť do pätíc, zase jeden žiak zvýšil a vypadol. Učiteľ teraz káže, aby sa zvyšní žiaci rozdelili do šestíc. Dokážte, že opäť jeden žiak zvýši.

D3 Určte všetky dvojice (m, n) kladných celých čísel, pre ktoré je číslo $4(mn + 1)$ deliteľné číslom $(m + n)^2$.

D4 Určte všetky celé kladné čísla m a n také, že n delí $2m - 1$ a m delí $2n - 1$.

D5 Nájdite všetky trojice navzájom rôznych prvočísel p, q, r spĺňajúce tri podmienky $p \mid q + r$, $q \mid r + 2p$ a $r \mid p + 3q$.

5

N1 Zdôvodnite, že polomer kružnice opísanej pravouhlému trojuholníku je polovicou dĺžky jeho prepony.

N2 Ukážte, že v pravouhlom trojuholníku s odvesnami dĺžok a a b a preponou dĺžky c platí pre polomer r kružnice jemu vpísanej vzorec $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$.

N3 Pravouhlý trojuholník o odvesnami dĺžok a a b a preponou dĺžky c spĺňa podmienku $3a + 4b = 5c$. Určte všetky možné hodnoty pomeru $a : c$.

D1 Pre polomer r kružnice vpísanej všeobecnému trojuholníku dokážte vzorec $r = S/s$, kde S je obsah tohto trojuholníka a s je polovica jeho obvodu.

D2 Odvoďte vzorec $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$ z úlohy N1 použitím výsledku úlohy D1.

D3 Daný je pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB. Dokážte, že veľkosť jeho výšky CD sa rovná súčtu polomerov kružníc vpísaných trojuholníkom ABC, CAD a CBD.

D4 Pravouhlý trojuholník má celočíselné dĺžky strán a obvod 11 990. Navyše vieme, že jedna jeho odvesna má prvočíselnú dĺžku. Určte ju.

D5 Pravouhlý trojuholník má celočíselné dĺžky strán. Jeho obvod je druhá mocnina prirodzeného čísla. Tiež vieme, že jedna jeho odvesna má dĺžku rovnú druhej mocnine prvočísla. Určte všetky možné hodnoty tejto dĺžky.

D6 V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB, kde $|AC| = 4$ a $|BC| = 3$, ležia navzájom sa dotýkajúce kružnice k_1 a k_2 s polomermi r_1, resp. r_2 tak, že k_1 sa dotýka strán AB a AC a k_2 sa dotýka strán AB a BC. Určte r_1 a r_2, ak platí $4r_1 = 9r_2$.

6

N1 Rozhodnite, či je možné štvorcovú tabuľku 3×3 vyplniť navzájom rôznymi prirodzenými číslami od 1 do 9 tak, aby v každom riadku existovalo číslo, ktoré sa rovná súčtu zvyšných dvoch čísel.

N2 Rozhodnite, či je možné štvorcovú tabuľku 3×3 vyplniť navzájom rôznymi prirodzenými číslami od 1 do 9 tak, aby v každom riadku existovalo číslo, ktorého štvornásobok sa rovná súčtu zvyšných dvoch čísel.

N3 Tabuľka 4×4 je vyplnená rôznymi celými číslami od 1 do 16. Isté číslo s v tejto tabuľke má tú vlastnosť, že jeho štvornásobok je rovný ako súčtu ostatných troch čísel z jeho riadka, tak súčtu ostatných troch čísel z jeho stĺpca. Určite najväčšie možné takéto s.

D1 Tabuľka 10×10 je vyplnená číslami 1 a -1 tak, že súčet čísel v každom riadku aj stĺpci je deliteľný 3. Určte najväčší možný súčet čísel v tabuľke a dokážte, že väčší byť nemôže. Uveďte tiež príklad tabuľky s určeným najväčším súčtom.

D2 V školskej záhrade hrá skupina žiakov hru zvanú molekuly. Učiteľ im najprv prikázal, aby sa rozdelili do trojíc. Jeden žiak zvýšil, a tak z ďalšej hry vypadol. Zvyšní žáci sa potom mali rozdeliť do štvoríc. Opäť jeden žiak zvýšil a vypadol. Potom sa zvyšní žiaci mali rozdeliť do pätíc, zase jeden žiak zvýšil a vypadol. Učiteľ teraz káže, aby sa zvyšní žiaci rozdelili do šestíc. Dokážte, že opäť jeden žiak zvýši.

D3 Tabuľka 10×10 je vyplnená číslami 1 a -1 tak, že súčet čísel v každom riadku až na jeden je rovný 0 a súčet čísel v každom stĺpci až na jeden je rovný rovnakému číslu s. Určte najväčšiu možnú hodnotu s a dokážte, že väčšia byť nemôže. Uveďte tiež príklad tabuľky s určenou najväčšou hodnotou s.

D4 Tabuľka 10×10 je vyplnená číslami -4, 3 a 10 tak, že súčet čísel v každom riadku až na jeden je nanajvýš 0 a súčet čísel v každom stĺpci až na jeden je nanajvýš 0. Určte najväčší možný súčet čísel v tabuľke.

D5 V tabuľke $n \times n$, pričom $n \geq 2$, sú po riadkoch napísané všetky čísla $1, 2, \dots, n^2$ v tomto poradí (v prvom riadku sú za sebou napísané čísla $1, 2, \dots, n$, v druhom riadku $n + 1, n + 2, \dots, 2n$, atď.). V jednom kroku môžeme zvoliť ľubovoľné dve čísla na susedných políčkach (t. j. na takých, ktoré majú spoločnú stranu), a ak je ich aritmetický priemer celé číslo, obe nahradíme týmto priemerom. Pre ktoré n možno po konečnom počte krokov dostať tabuľku, v ktorej sú všetky čísla rovnaké?

D6 Pre ktoré kladné prirodzené číslo n možno do tabuľky $n \times n$ vpísať všetky celé čísla od 1 po n^2 tak, aby aritmetický priemer čísel v každom riadku aj stĺpci tabuľky bol celým číslom?

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie B

1

N1 Dokážeť, že pre každé prirodzené číslo n je počet všetkých podmnožín n-prvkovej množiny 2^n.

Riešenie:

Predstavme si, že ľubovoľnú podmnožinu postupne zostrojujeme: Pre každý prvok sa rozhodujeme, či ho vyberieme alebo nie. Keďže týchto výberov je n a sú navzájom nezávislé, je rôznych výsledkov konštrukcie práve 2^n.

N2 Koľko neprázdnych podmnožín množiny $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ má párny súčet prvkov?

Riešenie:

31. V danej množine sú tri párne a tri nepárne čísla. Uvedomme si, že súčet prvkov jej podmnožiny je párny práve vtedy, keď je v nej párny počet nepárnych čísel – teda buď žiadne nepárne číslo (1 spôsob), alebo 2 nepárne čísla (tie je možné vybrať 3 spôsobmi). Počet všetkých vyhovujúcich výberov nepárnych čísel je tak 4. Každý z nich je potom možné doplniť o niektoré (prípadne aj žiadne) z troch párnych čísel práve 2^3 čiže 8 spôsobmi. Od výsledku $4 \cdot 8$ čiže 32 treba odčítať 1, pretože sme započítali aj podmnožinu zloženú z 0 párnych a 0 nepárnych čísel, teda prázdnu podmnožinu.

N3 Koľkými spôsobmi je možné z množiny $\{1, 2, \dots, 9\}$ vybrať dve čísla so súčtom deliteľným 3?

Riešenie:

12 spôsobov. Podľa zvyškov po delení 3 rozdelíme 9 zadaných čísel do troch množín $A_0 = \{1, 4, 7\}$, $A_1 = \{2, 5, 8\}$ a $A_2 = \{3, 6, 9\}$. Dve z týchto čísel majú súčet deliteľný 3 práve vtedy, keď nastane jeden z dvoch prípadov: buď jedno číslo je z A_1 a druhé z A_2, alebo sú obe čísla z A_0. Pre výber dvoch vyhovujúcich čísel máme v prvom prípade $3 \cdot 3$ čiže 9 možností, v druhom prípade 3 možnosti.

D1 Označme M počet všetkých možných vyplnení tabuľky 3×3 navzájom rôznymi prirodzenými číslami od 1 do 9. Ďalej označme N počet tých vyplnení, kde sú navyše súčty všetkých čísel v každom riadku aj stĺpci nepárne čísla. Určte pomer $N : M$.

Riešenie:

72-B-I-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=4362).

D2 Označme M počet všetkých možných vyplnení tabuľky 3×3 navzájom rôznymi prirodzenými číslami od 1 do 9. Ďalej označme D počet tých vyplnení, keď je navyše *súčin* čísel v niektorom riadku alebo stĺpci násobkom 10. Určte pomer $D : M$.

Riešenie:

72-B-S-1 (https://skmo.sk/dokument.php?id=4368).

D3 Koľko 33-ciferných čísel deliteľných 3 neobsahuje vo svojom zápise cifru 3? Výsledok zapíšte v tvare súčinu mocnín prvočísel.

Riešenie:

72-B-II-4 (https://skmo.sk/dokument.php?id=4449#page=5).

D4 Zovšeobecnenie úlohy N2:

Určte počet neprázdnych podmnožín množiny $\{0, 1, \dots, 2n-1\}$ s párnym súčtom prvkov, kde n je dané kladné prirodzené číslo.

Riešenie:

$2^{2n-1} - 1$. V danej množine je n párnych a n nepárnych čísel. Hľadáme počet podmnožín s párnym počtom nepárnych čísel. Ukážeme najprv, že počet spôsobov, akými je možné z n nepárnych čísel vybrať párny počet zástupcov, je rovný 2^{n-1}. Na to stačí dokázať, že medzi všetkými 2^n podmnožinami danej n-prvkovej množiny je tých s párnym počtom prvkov rovnako ako tých s nepárnym počtom prvkov, lebo oba počty sa potom rovnajú $2^n : 2 = 2^{n-1}$. Pre dôkaz zvolíme pevne jeden prvok a z danej n-prvkovej množiny a všetky jej podmnožiny rozdelíme na dve skupiny podľa toho, či prvok a obsahujú alebo nie. Zástupcov týchto dvoch skupín možno spárovať: Každú množinu M bez prvku a dáme do páru s množinou $M \cup \{a\}$. Keďže v každom páre je zrejme jedna množina s párnym a jedna s nepárnym počtom prvkov, je dôkaz hotový. Na dokončenie riešenia zvážime, že každý z 2^{n-1} vyhovujúcich výberov nepárnych čísel možno doplniť o niektoré (prípadne žiadne) z n párnych čísel práve 2^n spôsobmi. Od výsledku $2^{n-1} \cdot 2^n$ je potrebné odčítať 1, pretože sme započítali aj podmnožinu zloženú z 0 párnych a 0 nepárnych čísel, teda prázdnu podmnožinu.

D5 Zovšeobecnenie súťažnej úlohy:

Pre každé prirodzené k označme $p(k)$ počet tých podmnožín množiny $\{0, 1, \ldots, 3k\}$, ktoré majú súčet prvkov deliteľný 3 (započítame medzi ne aj prázdnu množinu). Dokážte, že $p(k) = \frac{1}{3}\left(2^{2k} + 2\right) \cdot 2^{k+1}$.

Riešenie:

Odvoďte najprv, že pre každé k platí $p(k+1) = 2\left(2^{3k+1} + p(k)\right)$, a potom využite matematickú indukciu.

Úplné riešenie nájdete v dokumente s riešeniami domáceho kola, keď bude po jeho skončení zverejnený na internetových stránkach MO.

2

N1 Pre reálne čísla a a b platí $a/(b+1) = b/(a+1)$. Dokážte, že $a = b$ alebo $a + b = -1$.

Riešenie:

Zadanú rovnosť upravíme na $a^2 + a = b^2 + b$, ďalej na $a^2 - b^2 = b - a$ a napokon použitím rozkladu $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ na $(a-b)(a+b+1) = 0$. Odtiaľ už vyplýva tvrdenie.

N2 Pre reálne čísla a, b, c platí $a/b = b/c = c/a$. Určte všetky možné hodnoty súčtu $a/(b+c) + b/(c+a) + c/(a+b)$.

Riešenie:

3/2. Čísla a, b, c sú nenulové vďaka existencii podielov $a/b, b/c, c/a$, ktorých spoločnú hodnotu označíme k. Vynásobením rovností $k = a/b$, $k = b/c$, $k = c/a$ dostaneme $k^3 = 1$, odkiaľ vyplýva $k = 1$. Rovnosť $k = 1$ podľa určenia čísla k však znamená, že $a = b = c \neq 0$, teda podiely $a/(b+c)$, $b/(c+a)$, $c/(a+b)$ majú zmysel a rovnakú hodnotu 1/2.

D1 Určte, aké hodnoty môže nadobúdať výraz

$$\frac{a+bc}{a+b} + \frac{b+ca}{b+c} + \frac{c+ab}{c+a},$$

ak sú a, b, c kladné reálne čísla so súčtom 1.

Riešenie:

70-C-I-4 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3473#page=4).

D2 Nech a, b, c sú kladné reálne čísla také, že $ab + bc + ca = 1$. Určte, aké hodnoty nadobúda výraz

$$\frac{a(b^2+1)}{a+b} + \frac{b(c^2+1)}{b+c} + \frac{c(a^2+1)}{c+a}.$$

Riešenie:

70-C-S-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3477#page=2).

D3 Nech x, y, z sú kladné reálne čísla, ktorých súčin je rovný 1. Dokážte, že platí

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1.$$

Riešenie:

Prvý zlomok rozšírte z, druhý xz a trikrát využite podmienku $xyz = 1$.

D4 Pre reálne čísla x, y, z platí $|x+y| = 1 - z$, $|y+z| = 1 - x$, $|z+x| = 1 - y$. Zistite, aké hodnoty môže nadobúdať $x + y + z$. Pre každý vyhovujúci súčet uveďte príklad prislúchajúcich čísel x, y, z.

Riešenie:

70-B-S-1 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3476).

D4 Pre reálne čísla a, b, c platí $a + b + c = 0$ a $a^3 + b^3 + c^3 = 0$. Nájdite všetky možné hodnoty abc.

Riešenie:

0. Z druhého vzťahu

$$0 = a^3 + b^3 + (-a-b)^3 = a^3 + b^3 - \left(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\right) = -3ab(a+b).$$

Vidíme, že nulové je aspoň jedno z čísel $a, b, a+b$, pritom tretie z nich je $-c$. Odtiaľ už vyplýva $abc = 0$.

D5 Nájdite všetky reálne riešenia sústavy rovníc

$$\frac{1}{x+y} + z = 1,$$

$$\frac{1}{y+z} + x = 1,$$

$$\frac{1}{z+x} + y = 1.$$

Riešenie:

69-A-II-1 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3386).

D6 Pre nenulové reálne čísla a, b, c platí $a^2 - b^2 = bc$ a $b^2 - c^2 = ca$. Ukážte, že potom $a^2 - c^2 = ab$.

Riešenie:

Sčítaním daných rovností dostaneme $a^2 - c^2 = bc + ca$, takže stačí overiť rovnosť $bc + ca = ab$ alebo $a(b - c) = bc$. Preto dané rovnosti upravíme na tvar $a^2 = b(b + c)$, $(b - c)(b + c) = ca$ a potom medzi sebou vynásobíme, čím dostaneme $a^2(b-c)(b+c) = abc(b+c)$. Odtiaľ už po vydelení oboch strán súčinom $a(b + c)$ získame overovanú rovnosť. Spomínané vydelenie je korektné, lebo podľa zadania platí $a \neq 0$ a prípadná rovnosť $b+c = 0$ by spolu s $b^2-c^2 = ca$ viedla k rovnosti $0 = ca$, ktorá je v spore s nenulovosťou čísel a a c.

---

3 Pripomeňme, že konvexný štvoruholník $ABCD$ je tetivový práve vtedy, keď platí ktorákoľvek z podmienok:

- Súčet niektorých dvoch jeho protiľahlých vnútorných uhlov je 180°, napríklad tých pri vrcholoch B a D: $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA| = 180°$. (Vtedy na tetivovosť akéhokoľvek štvoruholníka $ABCD$ stačí, aby body B a D ležali vo vnútri opačných polrovín s hraničnou priamkou AC.)
- Uhly „nad" niektorou jeho stranou sú zhodné, napríklad nad stranou AB ide o uhly s vrcholmi C a D: $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$. (Vtedy na tetivovosť akéhokoľvek štvoruholníka $ABCD$ či $ABDC$ stačí, aby body C a D ležali vo vnútri rovnakej polroviny s hraničnou priamkou AB.)

Pri riešení úloh často najprv použitím jednej z týchto podmienok tetivovosť niektorého konvexného štvoruholníka dokážeme a potom vhodne využijeme platnosť druhej podmienky.

N1 V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ platí rovnosť $|\sphericalangle BAD| = 42°$, $|\sphericalangle ABC| = 79°$, $|\sphericalangle DCB| = 138°$ a $|\sphericalangle BDC| = 25°$. Určte $|\sphericalangle ACB|$.

Riešenie:

76°. Vďaka súčtu $42° + 138° = 180°$ je štvoruholník $ABCD$ tetivový, takže v ňom platí $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$ a $|\sphericalangle ADC| = 180° - |\sphericalangle ABC| = 101°$, teda $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ADC| - |\sphericalangle BDC| = 101° - 25° = 76°$.

N2 Je daný ostrouhlý trojuholník ABC s výškami AD a BE. (Ako zvyčajne, *výškou trojuholníka* rozumieme *úsečku*, ktorú popisujeme jej krajnými bodmi.) Dokážte, že stred kružnice opísanej trojuholníku CDE leží na výške trojuholníka ABC z vrcholu C.

Riešenie:

Označme H priesečník výšok AD a BE. Vďaka pravým uhlom CEH a CDH je podľa Tálesovej vety štvoruholník $CEHD$ tetivový a stred kružnice jemu opísanej je stredom úsečky CH, teda naozaj leží na tretej výške trojuholníka ABC.

N3 Je daný ostrouhlý trojuholník ABC s výškami AD, BE a CF. Dokážte, že tieto výšky rozpoľujú vnútorné uhly trojuholníka DEF.

Riešenie:

Vzhľadom na symetriu stačí dokázať iba rovnosť $|\sphericalangle DFC| = |\sphericalangle EFC|$. Vďaka pravým uhlom nad stranou AC je štvoruholník $AFDC$ tetivový, odkiaľ $|\sphericalangle DFC| = |\sphericalangle DAC|$. Podobne je tetivový aj štvoruholník $ABDE$, takže $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle DBE| = |\sphericalangle CBE|$. Napokon aj štvoruholník $CEFB$ je tetivový, takže $|\sphericalangle CBE| = |\sphericalangle CFE|$. Dokopy už dostávame $|\sphericalangle DFC| = |\sphericalangle CFE|$. Kratší dôkaz zhodnosti uhlov DFC a EFC: V tetivovom štvoruholníku $ACDF$ sú zhodné uhly DFC a DAC, pritom druhý z ich má z trojuholníka DAC veľkosť $90° - \gamma$, kde $\gamma = |\sphericalangle BCA|$. Uhol DFC tak má veľkosť $90° - \gamma$, ktorá sa nezmení, ak vymeníme navzájom označenie vrcholov A a B. Túto veľkosť preto má aj uhol EFC.

D1 Sú dané dva tetivové štvoruholníky $ABXY$ a $CDYX$, pritom ich spoločné vrcholy X a Y ležia postupne na úsečkách AC a BD. Dokážte, že platí $AB \parallel CD$.

Riešenie:

Stačí dokázať zhodnosť striedavých uhlov BAC a DCA, teda uhlov BAX a DCX (lebo X leží medzi A a C). Využijeme na to vlastnosti oboch tetivových štvoruholníkov a to, že uhly BYX a XYD sú vedľajšie (lebo Y leží medzi B a D): $|\sphericalangle BAX| = |\sphericalangle BYX| = 180° - |\sphericalangle XYD| = 180° - (180° - |\sphericalangle DCX|) = |\sphericalangle DCX|$.

D2 Nech D je vnútorný bod prepony AB pravouhlého trojuholníka ABC. Označme X a Y stredy kružníc opísaných postupne trojuholníkom ADC a CDB. Ukážte, že body C, D, X a Y ležia na jednej kružnici.

Riešenie:

Keďže uhly CAD a DBC sú ostré, stredy X a Y ležia v opačných polrovinách s hraničnou priamkou DC a podľa vety o obvodovom a stredovom uhle pre veľkosti konvexných stredových uhlov CXD a DYC platí $|\sphericalangle CXD| = 2\,|\sphericalangle CAD|$ a $|\sphericalangle DYC| = 2\,|\sphericalangle DBC|$. Sčítaním oboch rovností dostaneme $|\sphericalangle CXD| + |\sphericalangle DYC| = 2(|\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle DBC|) = 2 \cdot 90° = 180°$, teda $CXDY$ je tetivový štvoruholník. Dokonca platí, že kružnica jemu opísaná má priemer XY, pretože trojuholníky CXY a DXY sú zhodné podľa vety *sss*, takže v tetivovom štvoruholníku $CXDY$ sú uhly pri protiľahlých vrcholoch C a D zhodné, a teda pravé.

D3 Je daný ostrouhlý trojuholník ABC. Dotyčnice v bodoch A a B ku kružnici tomuto trojuholníku opísanej sa pretínajú v bode T. Predpokladajme, že priamka rovnobežná so stranou AC, ktorá prechádza bodom T, pretína stranu BC v bode D. Ukážte, že $|AD| = |CD|$.

Riešenie:

Kľúčom k riešeniu je odhalenie tetivovosti štvoruholníka $ATBD$. Na dôkaz tohto poznatku stačí overiť, že oba uhly BAT a BDT majú rovnakú veľkosť $|\sphericalangle BCA|$, ktorú označíme γ – podľa zadania totiž oba body A a D ležia s celou opísanou kružnicou na jednej strane od jej dotyčnice BT. Pre prvý uhol TAB to priamo vyplýva z vety o obvodovom a úsekovom uhle, pre druhý uhol BDT je to dôsledok súhlasnej rovnobežnosti úsečiek AC a TD. Štvoruholník $ATBD$ je teda naozaj tetivový. Teraz už dokazovaná rovnosť $|AD| = |CD|$ vyplynie z toho, že v trojuholníku CAD má veľkosť γ nielen uhol DCA, ale aj uhol CAD. Ten je totiž zhodný so striedavým uhlom ADT, ten vďaka nášmu odhaleniu s uhlom ABT, ktorý je napokon podľa $|TA| = |TB|$ zhodný s uhlom TAB, o ktorého veľkosti γ už vieme.

D4 Nech AC je priemer kružnice opísanej tetivovému štvoruholníku $ABCD$. Predpokladajme, že na polpriamkach opačných k polpriamkam AD a DC existujú postupne body $A' \neq A$ a $C' \neq D$ také, že platí $|AB| = |A'B|$ a $|BC| = |BC'|$. Dokážte tvrdenia:

a) Body A', B, C' a D ležia na jednej kružnici k.

b) Ak je O stred kružnice k a O_A a O_C sú postupne stredy kružníc opísaných trojuholníkom $AA'B$, resp. $CC'B$, tak platí $OO_A \perp OO_C$.

Riešenie:

69-B-I-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3387#page=7).

D5 Na stranách AB a BC daného trojuholníka ABC ležia postupne také body D a E, že $|BD| = |DC| = |CA|$ a $|EC| = |ED|$. Dokážte, že $|AE| = |BE|$.

Riešenie:

72-B-II-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=4449#page=3).

D6 Daný je pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. Nech D je ľubovoľný vnútorný bod odvesny AC a p kolmica z bodu D na preponu AB. Označme E, kde $E \neq D$, bod priamky p taký, že body A, B, D, E ležia na kružnici. Označme ešte F priesečník priamok p a BC. Dokážte, že $|AE| = |AF|$.

Riešenie:

70-B-II-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3604#page=2).

D7 Daný je rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB a bod P vnútri jeho výšky z vrcholu C. Priamka AP pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bode Q, kde $Q \neq A$. Rovnobežka so základňou AB vedená bodom P pretína rameno BC v bode R. Dokážte, že polpriamka QR je osou uhla AQB.

Riešenie:

71-A-II-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3921#page=3).

4

N1 Pre celé čísla n, a, b platí $n \mid a$ a $n \mid b$. Dokážte, že potom pre ľubovoľné celé čísla k, l platí $n \mid ka + lb$ (špeciálne napríklad $n \mid a + b$ a $n \mid a - b$).

Riešenie:

Podľa podmienok $n \mid a$ a $n \mid b$ existujú celé čísla a' a b' také, že $a = a'n$ a $b = b'n$. Potom $ka + lb = ka'n + lb'n = (ka' + lb')n$, kde $ka' + lb'$ je celé číslo, a preto $n \mid ka + lb$.

N2 Pre ktoré prirodzené čísla n je zaručené, že celé čísla u, v spĺňajúce obe podmienky $n \mid u + v$ a $n \mid u - v$ sú samy deliteľné číslom n?

Riešenie:

Práve pre nepárne n. Z $n \mid u + v$ a $n \mid u - v$ vyplýva, že $n \mid 2u$ a $n \mid 2v$, pretože $2u = (u + v) + (u - v)$ a $2v = (u + v) - (u - v)$. Ak je n nepárne, je n s číslom 2 nesúdeliteľné, a preto z $n \mid 2u$ a $n \mid 2v$ už vyplýva $n \mid u$, resp. $n \mid v$. Pre párne n uvážte protipríklad $u = v = n/2$.

N3 Ukážte, že ak pre kladné prirodzené čísla a a b platí $a \mid b$ a $b \mid a$, tak $a = b$.

Riešenie:

Keďže pre každý kladný deliteľ d kladného prirodzeného čísla u zrejme platí $d \leq u$, z $a \mid b$ a $b \mid a$ vyplýva postupne $a \leq b$ a $b \leq a$, spolu $a = b$. Inak môžeme zapísať rovnosti $a = kb$ a $b = la$ pre vhodné kladné prirodzené čísla k a l, odkiaľ po vynásobení dostaneme $ab = kbla$ a ďalej po vydelení ab obdržíme $kl = 1$, čo znamená, že nutne $k = l = 1$.

N4 Ukážte, že ak pre rôzne kladné prirodzené čísla u a v platí $u \mid v$, tak $2u \leq v$.

Riešenie:

Z $u \mid v$ vyplýva $v = ku$ pre vhodné kladné prirodzené číslo, pritom z $u \neq v$ vyplýva $k \neq 1$, teda $k \geq 2$. Preto $v = ku \geq 2u$.

D1 Pre kladné prirodzené čísla a a b platí $a \mid 9b$ a $b \mid 9a$. Určte všetky možné hodnoty podielu a/b.

Riešenie 1:

9, 3, 1, 1/3, 1/9. Vzťah $a \mid 9b$ znamená $9b = ka$ pre vhodné kladné prirodzené k. Preto teraz $b \mid 9a$ prepíšeme ako $9b \mid 81a$, odkiaľ po dosadení za $9b$ dostaneme vzťah $ka \mid 81a$, čiže $k \mid 81$. Číslo k je teda jeden z deliteľov 1, 3, 9, 27, 81 čísla 81. Keďže z $9b = ka$ vyplýva $a/b = 9/k$, každá hodnota a/b sa musí rovnať jednému z čísel 9, 3, 1, 1/3, 1/9. Všetky tieto hodnoty sú dosiahnuteľné, napríklad dvojicami (a, b) z množiny $\{(9,1), (3,1), (1,1), (1,3), (1,9)\}$.

Riešenie 2:

Hodnota podielu a/b ani platnosť podmienok $a \mid 9b$ a $b \mid 9a$ sa nezmení, keď čísla a a b vydelíme ich najväčším spoločným deliteľom. Preto stačí uvažovať len dvojice nesúdeliteľných čísel a a b. Pre ne sú podmienky $a \mid 9b$ a $b \mid 9a$ postupne ekvivalentné s podmienkami $a \mid 9$ a $b \mid 9$, takže stačí vypočítať hodnoty a/b pre všetky dvojice (a, b) nesúdeliteľných deliteľov čísla 9, teda pre dvojice z množiny $\{(9,1), (3,1), (1,1), (1,3), (1,9)\}$.

D2 V školskej záhrade hrá skupina žiakov hru zvanú molekuly. Učiteľ im najprv prikázal, aby sa rozdelili do trojíc. Jeden žiak zvýšil, a tak z ďalšej hry vypadol. Zvyšní žáci sa potom mali rozdeliť do štvoríc. Opäť jeden žiak zvýšil a vypadol. Potom sa zvyšní žiaci mali rozdeliť do pätíc, zase jeden žiak zvýšil a vypadol. Učiteľ teraz káže, aby sa zvyšní žiaci rozdelili do šestíc. Dokážte, že opäť jeden žiak zvýši.

Riešenie:

71-C-I-1 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3925).

D3 Určte všetky dvojice (m, n) kladných celých čísel, pre ktoré je číslo $4(mn + 1)$ deliteľné číslom $(m + n)^2$.

Riešenie:

60-A-II-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=362#page=4).

D4 Určte všetky celé kladné čísla m a n také, že n delí $2m - 1$ a m delí $2n - 1$.

Riešenie:

59-A-II-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=7#page=4).

D5 Nájdite všetky trojice navzájom rôznych prvočísel p, q, r spĺňajúce tri podmienky $p \mid q + r$, $q \mid r + 2p$ a $r \mid p + 3q$.

Riešenie:

55-A-III-5 (https://skmo.sk/dokument.php?id=235#page=5).

5

N1 Zdôvodnite, že polomer kružnice opísanej pravouhlému trojuholníku je polovicou dĺžky jeho prepony.

Riešenie:

Podľa Tálesovej vety je prepona pravouhlého trojuholníka priemerom kružnice jemu opísanej.

N2 Ukážte, že v pravouhlom trojuholníku s odvesnami dĺžok a a b a preponou dĺžky c platí pre polomer r kružnice jemu vpísanej vzorec $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$.

Riešenie:

Body dotyku kružnice vpísanej rozdeľujú strany trojuholníka na šesť úsekov. Dva z nich (tie pri vrchole pravého uhla) sú susednými stranami štvorca so stranou dĺžky r. Celé odvesny tak majú dĺžky $a = r + x$ a $b = r + y$, kde x a y sú ich dĺžky úsekov pri vrcholoch ostrých uhlov. Tie sú (vďaka súmernostiam podľa osí týchto uhlov) zhodné s dvoma úsekmi, na ktoré je rozdelená prepona, ktorá má preto dĺžku $c = x + y$. Teraz je jasné, že zrejmú rovnosť $2r = (r + x) + (r + y) - (x + y)$ môžeme prepísať ako $2r = a + b - c$. Po vydelení číslom 2 sme s dôkazom hotoví.

N3 Pravouhlý trojuholník o odvesnami dĺžok a a b a preponou dĺžky c spĺňa podmienku $3a + 4b = 5c$. Určte všetky možné hodnoty pomeru $a : c$.

Riešenie:

Zadanú rovnosť vydelíme c a dostaneme $3a/c + 4b/c = 5$. Z Pytagorovej vety máme $a^2 + b^2 = c^2$, takže $(a/c)^2 + (b/c)^2 = 1$. To nám dáva pre podiely $x = a/c$ a $y = b/c$ sústavu rovníc $3x + 4y = 5$ a $x^2 + y^2 = 1$. Ak dosadíme vyjadrenie $y = (5 - 3x)/4$ z prvej rovnice do druhej rovnice, dostaneme po vynásobení číslom 16 rovnicu $16x^2 + (5 - 3x)^2 = 16$, po úprave $(5x - 3)^2 = 0$. Odtiaľ $x = 3/5$. Nájdená hodnota $a/c = x = 3/5$ pomeru $a : c$ je možná – napríklad $a = 3$, $b = 4$ a $c = 5$ sú dĺžky strán pravouhlého trojuholníka a platí pre ne $3a + 4b = 5c$.

D1 Pre polomer r kružnice vpísanej všeobecnému trojuholníku dokážte vzorec $r = S/s$, kde S je obsah tohto trojuholníka a s je polovica jeho obvodu.

Riešenie:

Označme I stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC so zvyčajne označenými dĺžkami strán. Obsah S celého trojuholníka je súčtom obsahov trojuholníkov BCI, CAI a ABI, ktoré sa postupne rovnajú $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$ a $\frac{1}{2}cr$. Z rovnosti $S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr$ už jednoduchou úpravou dostaneme dokazovaný vzorec.

D2 Odvoďte vzorec $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$ z úlohy N1 použitím výsledku úlohy D1.

Riešenie:

Trojuholník zo zadania úlohy N1 má obsah $S = \frac{1}{2}ab$. Podľa vzorca z D1 tak s prihliadnutím na $c^2 = a^2 + b^2$ platí

$$r = \frac{S}{s} = \frac{\frac{ab}{2}}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{ab}{a + b + c} = \frac{ab(a + b - c)}{(a + b + c)(a + b - c)}$$

$$= \frac{ab(a + b - c)}{(a + b)^2 - c^2} = \frac{ab(a + b - c)}{(a + b)^2 - (a^2 + b^2)} = \frac{ab(a + b - c)}{2ab} = \frac{a + b - c}{2}.$$

D3 Daný je pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB. Dokážte, že veľkosť jeho výšky CD sa rovná súčtu polomerov kružníc vpísaných trojuholníkom ABC, CAD a CBD.

Riešenie:

Pri bežnom označení $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$, $v = |CD|$, $c_a = |AD|$ a $c_b = |BD|$ platia pre polomery r, r_a, r_b kružníc vpísaných postupne pravouhlým trojuholníkom ABC, CAD a CBD podľa úlohy N2 vzorce

$$r = \frac{a + b - c}{2},$$

$$r_a = \frac{c_a + b - c}{2}$$

a

$$r_b = \frac{c_b + v - a}{2}.$$

Ich sčítaním už dostaneme $r + r_a + r_b = v + \frac{1}{2}(c_a + c_b - c) = v$, lebo $c_a + c_b = c$.

D4 Pravouhlý trojuholník má celočíselné dĺžky strán a obvod 11 990. Navyše vieme, že jedna jeho odvesna má prvočíselnú dĺžku. Určte ju.

Riešenie:

71-B-I-1 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3924).

D5 Pravouhlý trojuholník má celočíselné dĺžky strán. Jeho obvod je druhá mocnina prirodzeného čísla. Tiež vieme, že jedna jeho odvesna má dĺžku rovnú druhej mocnine prvočísla. Určte všetky možné hodnoty tejto dĺžky.

Riešenie:

71-B-S-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3928#page=3).

D6 V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB, kde $|AC| = 4$ a $|BC| = 3$, ležia navzájom sa dotýkajúce kružnice k_1 a k_2 s polomermi r_1, resp. r_2 tak, že k_1 sa dotýka strán AB a AC a k_2 sa dotýka strán AB a BC. Určte r_1 a r_2, ak platí $4r_1 = 9r_2$.

Riešenie:

62-A-II-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=675#page=2).

6

N1 Rozhodnite, či je možné štvorcovú tabuľku 3×3 vyplniť navzájom rôznymi prirodzenými číslami od 1 do 9 tak, aby v každom riadku existovalo číslo, ktoré sa rovná súčtu zvyšných dvoch čísel.

Riešenie:

Nejde to. Dôkaz sporom: Majme vyhovujúcu tabuľku. Ak je v jej prvom riadku číslo a a ďalšie dve čísla so súčtom a, je súčet všetkých troch čísel rovný $2a$, čo je párne číslo. Podobne sú párne súčty čísel v druhom aj treťom riadku, a teda aj súčet všetkých 9 čísel v tabuľke. Ten je však $1 + \cdots + 9$ čiže 55, čo je spor.

N2 Rozhodnite, či je možné štvorcovú tabuľku 3×3 vyplniť navzájom rôznymi prirodzenými číslami od 1 do 9 tak, aby v každom riadku existovalo číslo, ktorého štvornásobok sa rovná súčtu zvyšných dvoch čísel.

Riešenie:

Nejde to. Dôkaz sporom: Majme vyhovujúcu tabuľku. V prvom riadku je číslo a a zvyšné dve čísla so súčtom $4a$, súčet všetkých troch čísel tak je $5a$. Analogický význam ako a bude mať číslo b z druhého riadka a číslo c z tretieho riadka. Súčet 45 všetkých 9 čísel v tabuľke je tak $5(a + b + c)$, odkiaľ $a + b + c = 9$. Keďže súčet akýchkoľvek dvoch čísel z tabuľky neprevyšuje $9 + 8$ čiže 17, platí to aj pre čísla $4a$, $4b$ a $4c$, takže $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4\}$. Spolu s $a + b + c = 9$ to znamená, že $\{a, b, c\} = \{2, 3, 4\}$. Číslo 4 tak zdieľa riadok s dvoma číslami so súčtom $4 \cdot 4$ čiže 16, ide teda o čísla 7 a 9. Odtiaľ už vyplýva, že číslo 3 nemôže zdieľať riadok s dvoma číslami so súčtom $4 \cdot 3$ čiže 12, pretože každá z možných dvojíc $(3, 9)$, $(4, 8)$ a $(5, 7)$ je vylúčená pre riadok s číslami 4, 7, 9.

N3 Tabuľka 4×4 je vyplnená rôznymi celými číslami od 1 do 16. Isté číslo s v tejto tabuľke má tú vlastnosť, že jeho štvornásobok je rovný ako súčtu ostatných troch čísel z jeho riadka, tak súčtu ostatných troch čísel z jeho stĺpca. Určite najväčšie možné takéto s.

Riešenie:

9. Nech vyhovujúce číslo s zdieľa riadok s trojicou čísel (a, b, c), a stĺpec s trojicou (d, e, f). Sčítaním rovností $4s = a + b + c$ a $4s = d + e + f$ dostaneme, že číslo $8s$ je rovné súčtu šiestich rôznych čísel z tabuľky, ktorý neprevyšuje súčet čísel od 11 do 16 rovný 81. Platí teda $8s \leq 81$, odkiaľ $s \leq 10$. Prípad $s = 10$ však možný nie je: Súčty $a + b + c$ a $d + e + f$ by museli byť (až na poradie sčítancov) medzi súčtami $16 + 15 + 9$, $16 + 13 + 11$, $15 + 14 + 11$ a $15 + 13 + 12$ – každé dva z nich však majú spoločný sčítanec. Prípad $s = 9$ už možný je: Uvažujme tabuľku, v ktorej číslo 9 zdieľa riadok s trojicou $(16, 15, 5)$ a stĺpec s trojicou $(14, 12, 10)$, ostatné čísla sú rozmiestnené akokoľvek.

D1 Tabuľka 10×10 je vyplnená číslami 1 a -1 tak, že súčet čísel v každom riadku aj stĺpci je deliteľný 3. Určte najväčší možný súčet čísel v tabuľke a dokážte, že väčší byť nemôže. Uveďte tiež príklad tabuľky s určeným najväčším súčtom.

Riešenie:

71-C-S-1 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3929).

D2 V školskej záhrade hrá skupina žiakov hru zvanú molekuly. Učiteľ im najprv prikázal, aby sa rozdelili do trojíc. Jeden žiak zvýšil, a tak z ďalšej hry vypadol. Zvyšní žáci sa potom mali rozdeliť do štvoríc. Opäť jeden žiak zvýšil a vypadol. Potom sa zvyšní žiaci mali rozdeliť do pätíc, zase jeden žiak zvýšil a vypadol. Učiteľ teraz káže, aby sa zvyšní žiaci rozdelili do šestíc. Dokážte, že opäť jeden žiak zvýši.

Riešenie:

71-C-I-1 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3925).

D3 Tabuľka 10×10 je vyplnená číslami 1 a -1 tak, že súčet čísel v každom riadku až na jeden je rovný 0 a súčet čísel v každom stĺpci až na jeden je rovný rovnakému číslu s. Určte najväčšiu možnú hodnotu s a dokážte, že väčšia byť nemôže. Uveďte tiež príklad tabuľky s určenou najväčšou hodnotou s.

Riešenie:

71-C-II-4 (https://skmo.sk/dokument.php?id=4055#page=4).

D4 Tabuľka 10×10 je vyplnená číslami -4, 3 a 10 tak, že súčet čísel v každom riadku až na jeden je nanajvýš 0 a súčet čísel v každom stĺpci až na jeden je nanajvýš 0. Určte najväčší možný súčet čísel v tabuľke.

Riešenie:

71-B-II-4 (https://skmo.sk/dokument.php?id=4057#page=5).

D5 V tabuľke $n \times n$, pričom $n \geq 2$, sú po riadkoch napísané všetky čísla 1, 2, …, n^2 v tomto poradí (v prvom riadku sú za sebou napísané čísla 1, 2, …, n, v druhom riadku $n+1$, $n+2$, …, $2n$, atď.). V jednom kroku môžeme zvoliť ľubovoľné dve čísla na susedných políčkach (t. j. na takých, ktoré majú spoločnú stranu), a ak je ich aritmetický priemer celé číslo, obe nahradíme týmto priemerom. Pre ktoré n možno po konečnom počte krokov dostať tabuľku, v ktorej sú všetky čísla rovnaké?

Riešenie:

57-A-II-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=214#page=2).

D6 Pre ktoré kladné prirodzené číslo n možno do tabuľky $n \times n$ vpísať všetky celé čísla od 1 po n^2 tak, aby aritmetický priemer čísel v každom riadku aj stĺpci tabuľky bol celým číslom?

Riešenie:

68-A-III-6 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3121#page=9).