MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie C

1

N1 Peter napísal na tabuľu 7 po sebe idúcich prirodzených čísel. Pavol ich nevidel, ale tvrdí, že jedno z nich je deliteľné 7. Má pravdu? Prečo?

N2 Myslím si prirodzené číslo. Ak ho zmenším o 1, dostanem číslo deliteľné 3. Ak myslené číslo zmenším o 2, dostanem číslo deliteľné 4.

a) Aké najmenšie číslo si môžem myslieť?

b) Nájdite všetky čísla, ktoré si môžem myslieť.

N3 Blchy Adam a Baša skáču po očíslovaných schodoch stále hore. Adam začína na 1. schode a skáče o a schodov. Baša začína na 3. schode a skáče o b schodov. Schody, na ktoré obe blchy doskočia, nazveme „dvakrát navštívené“. Určte najmenší kladný rozdiel poradových čísel dvakrát navštívených schodov, a to v prípadoch

a) $a = 4$ a $b = 5$;

b) $a = 4$ a $b = 6$;

b) $a = 6$ a $b = 9$.

D1 Dokážte, že z n po sebe idúcich prirodzených čísel je vždy práve jedno deliteľné číslom n.

D2 V školskej záhrade hrá skupina žiakov hru zvanú molekuly. Učiteľ im najprv prikázal, aby sa rozdelili do trojíc. Jeden žiak zvýšil, a tak z ďalšej hry vypadol. Zvyšní žiaci sa potom mali rozdeliť do štvoríc. Opäť jeden žiak zvýšil a vypadol. Potom sa zvyšní žiaci mali rozdeliť do piatich, zase jeden žiak zvýšil a vypadol. Učiteľ teraz káže, aby sa zvyšní žiaci rozdelili do šestíc. Dokážte, že opäť jeden žiak zvýši.

D3 Štyri dni po sebe som zdolával rovnaké schodisko majúce menej ako 100 schodov. Bral som ho prvý deň po 2 schodoch, druhý deň po 3, tretí deň po 4 a štvrtý deň po 5 schodoch, na posledný krok mi ostali postupne 1, 2, 3 a 4 schody. Koľko schodov celé schodisko malo?

D4 Myslím si prirodzené číslo, ktoré je väčšie ako 2000, menšie ako 3000 a je deliteľné 17. Ak myslené číslo zväčším o 1, dostanem číslo deliteľné 11. Ak svoje číslo naopak zmenším o 1, dostanem číslo deliteľné 6. Aké číslo si myslím?

2

N1 Nájdite všetky rovnoramenné trojuholníky, ktoré majú aspoň jeden uhol veľkosti

a) 30°,

b) 60°.

N2 Bez použitia Tálesovej vety dokážte, že stred kružnice opísanej pravouhlému trojuholníku splýva so stredom jeho prepony. Využite na to vhodne dve stredné priečky.

N3 Uvažujme šesť bodov: vrcholy daného rovnostranného trojuholníka a stredy jeho strán. Zistite, koľko pravouhlých trojuholníkov má ako vrcholy tri zo šiestich uvažovaných bodov.

D1 V danom pravouhlom trojuholníku ABC označme K stred prepony AB a L stred kratšej odvesny AC. Kružnica s priemerom BC pretína úsečku KL v bode P. Dokážte, že uhly PAC a PBC sú zhodné.

D2 Daný je trojuholník ABC, v ktorom D, E sú postupne stredy strán BC, AB. Nech F je stred úsečky BE a G vnútorný bod strany AC taký, že $|AG| = 3\,|CG|$. Dokážte, že priesečník priamok DF a GE leží na tej rovnobežke s priamkou BC, ktorá prechádza bodom A.

D3 Šesťuholník, ktorého všetky uhly majú rovnakú veľkosť, má štyri po sebe idúce strany s dĺžkami 1, 7, 4 a 2. Zistite dĺžku zvyšných dvoch strán.

3

N1 V jednej rodine žije

a) 7 bratov bez sestry,

b) 7 bratov a 1 sestra.

Každý z nich vysloví jedno pravdivé vyhlásenie z ponuky v súťažnej úlohe. Určte maximálny počet rôznych výrokov, ktoré môžu zaznieť.

N2 Majme n navzájom rôznych prirodzených čísel. Každé z nich zafarbíme buď namodro, alebo načerveno. Zistite, pre aké najmenšie n už zaručene nájdeme dve čísla rovnakej farby, ktorých rozdiel je párny.

D1 Do vreca je nahádzaných 5 párov čiernych, 6 párov modrých a 7 párov sivých papúč, pritom páry papúč rovnakej farby sú nerozlíšiteľné. Koľko papúč musíme vytiahnuť, aby sme určite medzi nimi mali

a) dve papuče rovnakej farby,

b) dve papuče rovnakej farby, ktoré tvoria pár?

D2 Na Ostrove Logiky patrí každý jeho obyvateľ buď medzi poctivcov, ktorí hovoria vždy pravdu, alebo medzi klamárov, ktorí vždy klamú. Pri stole sa stretnú traja obyvatelia tohto ostrova – Oliver, Pavol a Romana. Oliver povie: „Medzi nami nie je ani jeden poctivec.". Pavol dodá: „Medzi nami je práve jeden poctivec.". Je Romana poctivec, alebo klamár?

D3 Na Ostrov Logiky z úlohy D2 zavíta turista, ktorý si najme miestneho sprievodcu. Pri ceste uvidia v diaľke ďalšieho domorodca. Turista za ním vyšle svojho sprievodcu, aby sa ho spýtal, či je poctivcom, alebo klamárom. „Tvrdí, že je poctivec.", prinesie správu sprievodca. Je sprievodca poctivec, alebo klamár?

4

N1 Pre prirodzené čísla a, b, c, d platí $ab + bc + cd + da = 77$. Určte všetky možné hodnoty ich súčtu.

N2 Predpokladajme, že navzájom rôzne reálne čísla a, b, c, d spĺňajú nerovnosti

$$ab + cd > bc + ad > ac + bd.$$

Ak a je z týchto štyroch čísel najväčšie, ktoré z nich je najmenšie?

D1 Nájdite všetky štvorice (a, b, c, d) celých čísel so súčtom 71 také, že $a > b > c > d$ a platí

$$(a - b)(c - d) + (a - d)(b - c) = 26.$$

D2 Určite všetky možné hodnoty súčtu $a + b + c + d$, kde a, b, c, d sú kladné celé čísla spĺňajúce rovnosť

$$(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) + (b^2 - d^2)(c^2 - a^2) = 2021.$$

D3 Na každej stene kocky je napísané kladné celé číslo. Ku každému vrcholu je pripísaný súčin troch čísel na priľahlých stenách. Súčet ôsmich čísel pri vrcholoch je 1001. Určte všetky možné hodnoty súčtu čísel na stenách.

D4 Určte počet všetkých trojíc kladných celých čísel a, b, c, pre ktoré platí $a + ab + abc + ac + c = 2017$.

5

N1 Uvažujme prirodzené čísla od 1 do 10 (vrátane). Najviac koľko z nich môžeme medzi sebou vynásobiť, aby druhá odmocnina z ich súčinu bola rovná prirodzenému číslu?

N2 Nech n je kladné prirodzené číslo. Ukážte, že číslo $\sqrt{n}$ je celé práve vtedy, keď v rozklade čísla n na prvočinitele má každé prvočíslo párny počet výskytov.

N3 a) Dokážte, že rovnosť $a^2 = 2b^2$ neplatí pre žiadne kladné prirodzené čísla a a b.

b) Dokážte, že číslo $\sqrt{2}$ je iracionálne, t. j. že sa nerovná žiadnemu zlomku a/b, kde a a b sú kladné prirodzené čísla.

c) Dokážte, že čísla $\sqrt{3}$ a $\sqrt{6}$ sú iracionálne.

D1 Dokážte, že pre každé kladné prirodzené číslo n je číslo $\sqrt{n}$ buď celé, alebo iracionálne.

D2 Kladné prirodzené číslo n je také, že číslo $6n^2 + 5n + 1$ je druhou mocninou prirodzeného čísla. Dokážte, že aj obe čísla $2n + 1$ a $3n + 1$ sú druhými mocninami prirodzených čísel.

D3 Na tabuli je napísaných n rôznych prirodzených čísel od 1 do n. V jednom kroku zotrieme nejaké dve čísla a namiesto nich napíšeme absolútnu hodnotu ich rozdielu. Pokračujeme tak dlho, kým na tabuli nezostane jediné číslo. Pre ktoré čísla n bude toto posledné číslo nepárne nezávisle od toho, v akom poradí budeme čísla zotierať?

6

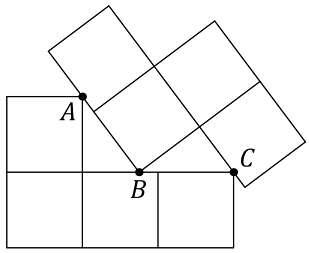
N1 Vo štvorci $ABCD$ zvoľme vo vnútri strany AB ľubovoľne bod K a vo vnútri strany BC ľubovoľne bod L. Na polpriamke CD zvoľme bod M tak, aby $|\sphericalangle KLM| = 90°$. Dokážte, že trojuholníky BLK a CML sú podobné.

N2 Na stranách AB, BC, CD, DA štvorca $ABCD$ postupne zvolíme body K, L, M, N tak, že $|AK| : |KB| = |BL| : |LC| = |CM| : |MD| = |DN| : |NA| = 2 : 1$.

a) Dokážte, že $KLMN$ je štvorec.

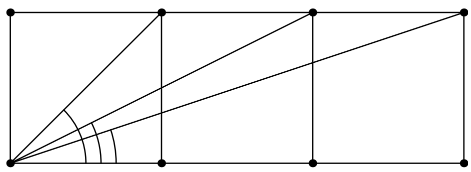
b) Určte pomer obsahov štvorcov $KLMN$ a $ABCD$.

D1 Dve tetrisové kocky zostavené zo štvorcov o rozmeroch 1×1 sa dotýkajú v bodoch A, B, C ako na obrázku. Vypočítajte $|AB|$.



D2 Označme E stred základne AB lichobežníka $ABCD$, pričom $|AB| : |CD| = 3 : 1$. Uhlopriečka AC pretína úsečky ED, BD postupne v bodoch F, G. Určte postupný pomer $|AF| : |FG| : |GC|$.

D3 Na obrázku sú vyznačené uhly medzi uhlopriečkou a stranou v troch pravouholníkoch 3×1, 2×1 a 1×1.



Dokážte, že súčet týchto troch uhlov je 90°.

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Návodné a doplňujúce úlohy
k úlohám domáceho kola kategórie C

1

N1 Peter napísal na tabuľu 7 po sebe idúcich prirodzených čísel. Pavol ich nevidel, ale tvrdí, že jedno z nich je deliteľné 7. Má pravdu? Prečo?

Riešenie:

Pavol má pravdu. Označme n najmenšie z týchto čísel a z jeho zvyšok po delení 7. Ak neplatí $z = 0$, tak $1 \leq 7 - z \leq 6$, takže číslo $n + (7 - z)$ je napísané na tabuli a je deliteľné 7, lebo je súčtom čísel $n - z$ a 7, ktoré sú obe deliteľné 7.

N2 Myslím si prirodzené číslo. Ak ho zmenším o 1, dostanem číslo deliteľné 3. Ak myslené číslo zmenším o 2, dostanem číslo deliteľné 4.

a) Aké najmenšie číslo si môžem myslieť?
b) Nájdite všetky čísla, ktoré si môžem myslieť.

Riešenie:

a) Číslo 10. Z čísel 1, 4, 7, 10, 13, … vyberieme najmenšie, ktoré spĺňa aj druhú podmienku.
b) Číslo $10+12k$ pre ľubovoľné prirodzené k. Každé číslo sa v porovnaní s číslom 10 líši o násobok 3 (z prvej podmienky) a zároveň o násobok 4 (z druhej podmienky), teda o násobok 12.

N3 Blchy Adam a Baša skáču po očíslovaných schodoch stále hore. Adam začína na 1. schode a skáče o a schodov. Baša začína na 3. schode a skáče o b schodov. Schody, na ktoré obe blchy doskočia, nazveme „dvakrát navštívené“. Určte najmenší kladný rozdiel poradových čísel dvakrát navštívených schodov, a to v prípadoch

a) $a = 4$ a $b = 5$;
b) $a = 4$ a $b = 6$;
b) $a = 6$ a $b = 9$.

Riešenie:

a) 20.
b) 12.
b) také schody neexistujú.

Hľadaný rozdiel je vo všeobecnosti rovný najmenšiemu spoločnému násobku čísel a a b, v prípade, že dvakrát navštívené schody vôbec existujú. To je v prípade c) vylúčené, pretože celé čísla k a l pre rovnicu $1 + ka = 3 + lb$ vtedy neexistujú – z čísel $1 + 6k$ a $3 + 9l$ je vždy iba to druhé deliteľné 3.

D1 Dokážte, že z n po sebe idúcich prirodzených čísel je vždy práve jedno deliteľné číslom n.

Riešenie:

Zvyšky n po sebe idúcich prirodzených čísel tvoria – podľa zvyšku k najmenšieho z týchto čísel – v prípade $k = 0$ n-ticu $(0, 1, 2, \ldots, n-1)$, v prípade $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ n-ticu $(k, k+1, \ldots, n-1, 0, 1, \ldots, k-1)$.

D2 V školskej záhrade hrá skupina žiakov hru zvanú molekuly. Učiteľ im najprv prikázal, aby sa rozdelili do trojíc. Jeden žiak zvýšil, a tak z ďalšej hry vypadol. Zvyšní žiaci sa potom mali rozdeliť do štvoríc. Opäť jeden žiak zvýšil a vypadol. Potom sa zvyšní žiaci mali rozdeliť do piatich, zase jeden žiak zvýšil a vypadol. Učiteľ teraz káže, aby sa zvyšní žiaci rozdelili do šestíc. Dokážte, že opäť jeden žiak zvýši.

Riešenie:

Ide sa o úlohu 71-C-I-1 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3925). Keď jej znenie prevedieme do jazyka čísel, z riešenia úlohy N2 vyplynie, že počet žiakov je tvaru $10+12k$. Vďaka rovnosti $10+12k = 6(1+2k)+4$ má zvyšok takého čísla po delení 6 potrebnú hodnotu 4.

D3 Štyri dni po sebe som zdolával rovnaké schodisko majúce menej ako 100 schodov. Bral som ho prvý deň po 2 schodoch, druhý deň po 3, tretí deň po 4 a štvrtý deň po 5 schodoch, na posledný krok mi ostali postupne 1, 2, 3 a 4 schody. Koľko schodov celé schodisko malo?

Riešenie:

59. Keby malo schodisko o 1 schod viac, bol by ich počet deliteľný každým z čísel 2, 3, 4, 5.

D4 Myslím si prirodzené číslo, ktoré je väčšie ako 2000, menšie ako 3000 a je deliteľné 17. Ak myslené číslo zväčším o 1, dostanem číslo deliteľné 11. Ak svoje číslo naopak zmenším o 1, dostanem číslo deliteľné 6. Aké číslo si myslím?

Riešenie:

Hľadajme najskôr najmenšie prirodzené číslo n s vlastnosťami $17 \mid n$, $11 \mid n+1$ a $6 \mid n-1$. Prácnejšiemu postupu sa vyhneme, keď $6 \mid n-1$ zapíšeme ako $6 \mid n+17$, a prejdeme tak len k dvom podmienkam $(17 \cdot 6) \mid n+17$ a $11 \mid n+1$. Keďže $17 \cdot 6 = 102$, z prvej podmienky máme $n = 102k - 17$, teda hľadáme najmenšie prirodzené k, pre ktoré $11 \mid 102k - 16$. To sa dá zjednodušiť na $11 \mid 3k + 6$ a ďalej ešte na $11 \mid k + 2$, odkiaľ $k = 9$ a $n = 102 \cdot 9 - 17 = 901$. Keďže $17 \cdot 6 \cdot 11 = 1122$, všetky vyhovujúce n sú tvaru $901 + 1122l$. Preto je myslené číslo $901 + 1122$ čiže 2023.

2

N1 Nájdite všetky rovnoramenné trojuholníky, ktoré majú aspoň jeden uhol veľkosti

a) 30°,

b) 60°.

Riešenie:

a) Sú to trojuholníky s trojicami uhlov $(30°, 30°, 120°)$ a $(30°, 75°, 75°)$

b) Vyhovujú len rovnostranné trojuholníky.

N2 Bez použitia Tálesovej vety dokážte, že stred kružnice opísanej pravouhlému trojuholníku splýva so stredom jeho prepony. Využite na to vhodne dve stredné priečky.

Riešenie:

Stred kružnice opísanej všeobecnému trojuholníku leží v priesečníku osí jeho troch strán, na jeho určenie stačí využiť dve z týchto osí. Stredné priečky pravouhlého trojuholníka, ktoré sú rovnobežné s jeho odvesnami, ležia na osiach týchto dvoch strán. Preto tieto dve osi prechádzajú spoločným bodom spomínaných dvoch priečok, teda stredom prepony.

N3 Uvažujme šesť bodov: vrcholy daného rovnostranného trojuholníka a stredy jeho strán. Zistite, koľko pravouhlých trojuholníkov má ako vrcholy tri zo šiestich uvažovaných bodov.

Riešenie:

Šesť. Jednou z odvesien každého trojuholníka musí byť niektorá výška pôvodného rovnostranného trojuholníka.

D1 V danom pravouhlom trojuholníku ABC označme K stred prepony AB a L stred kratšej odvesny AC. Kružnica s priemerom BC pretína úsečku KL v bode P. Dokážte, že uhly PAC a PBC sú zhodné.

Riešenie:

72-C-S-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=4367#page=2).

D2 Daný je trojuholník ABC, v ktorom D, E sú postupne stredy strán BC, AB. Nech F je stred úsečky BE a G vnútorný bod strany AC taký, že $|AG| = 3\,|CG|$. Dokážte, že priesečník priamok DF a GE leží na tej rovnobežke s priamkou BC, ktorá prechádza bodom A.

Riešenie:

70-C-II-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3605#page=3).

D3 Šesťuholník, ktorého všetky uhly majú rovnakú veľkosť, má štyri po sebe idúce strany s dĺžkami 1, 7, 4 a 2. Zistite dĺžku zvyšných dvoch strán.

Riešenie:

5 a 6. Keďže uhly daného šesťuholníka majú veľkosť $(6-2) \cdot 180°/6$ čiže 120°, možno jeho vrcholy umiestniť do uzlov rovinnej siete tvorenej rovnostrannými trojuholníkmi so stranou dĺžky 1.

3

N1 V jednej rodine žije

a) 7 bratov bez sestry,

b) 7 bratov a 1 sestra.

Každý z nich vysloví jedno pravdivé vyhlásenie z ponuky v súťažnej úlohe. Určte maximálny počet rôznych výrokov, ktoré môžu zaznieť.

Riešenie:

a) 1.

b) 3.

V prípade b) prichádzajú do úvahy iba 3 výroky: o práve 1 sestre, o práve 7 bratoch a o práve 6 bratoch.

N2 Majme n navzájom rôznych prirodzených čísel. Každé z nich zafarbíme buď namodro, alebo načerveno. Zistite, pre aké najmenšie n už zaručene nájdeme dve čísla rovnakej farby, ktorých rozdiel je párny.

Riešenie:

5. Rozdiel dvoch čísel je párny práve vtedy, keď čísla majú rovnakú paritu (párne/nepárne). V prípade $n \geq 5$ nájdeme podľa Dirichletovho princípu aspoň 3 zafarbené čísla rovnakej parity. Niektoré dve z nich budú mať rovnakú farbu. V prípade $n = 4$ (a tým vlastne aj v prípade $n < 4$) uvedieme protipríklad: Za predpokladu, že máme zadané čísla od 1 do 4, zafarbíme namodro čísla 1, 2 a načerveno čísla 3, 4.

D1 Do vreca je nahádzaných 5 párov čiernych, 6 párov modrých a 7 párov sivých papúč, pritom páry papúč rovnakej farby sú nerozlíšiteľné. Koľko papúč musíme vytiahnuť, aby sme určite medzi nimi mali

a) dve papuče rovnakej farby,

b) dve papuče rovnakej farby, ktoré tvoria pár?

Riešenie:

a) 4, pretože papuče sú troch farieb.

b) 19. Vo vreci je celkovo $5 + 6 + 7$ čiže 18 párov papúč. Ak vytiahneme 18 papúč a ak ešte nebude medzi nimi pár tej istej farby, bude to znamenať, že sme z každej farby vytiahli buď iba ľavé, alebo iba pravé papuče, a teda buď všetky ľavé, alebo všetky pravé papuče z každej farby. Preto po vytiahnutí 19. papuče sa zaručene jeden pár tej istej farby skompletizuje.

D2 Na Ostrove Logiky patrí každý jeho obyvateľ buď medzi poctivcov, ktorí hovoria vždy pravdu, alebo medzi klamárov, ktorí vždy klamú. Pri stole sa stretnú traja obyvatelia tohto ostrova – Oliver, Pavol a Romana. Oliver povie: „Medzi nami nie je ani jeden poctivec.". Pavol dodá: „Medzi nami je práve jeden poctivec.". Je Romana poctivec, alebo klamár?

Riešenie:

Klamár. Zvážte najskôr, do ktorej skupiny patrí Oliver, a potom, do ktorej Pavol.

D3 Na Ostrov Logiky z úlohy D2 zavíta turista, ktorý si najme miestneho sprievodcu. Pri ceste uvidia v diaľke ďalšieho domorodca. Turista za ním vyšle svojho sprievodcu, aby sa ho spýtal, či je poctivcom, alebo klamárom. „Tvrdí, že je poctivec.", prinesie správu sprievodca. Je sprievodca poctivec, alebo klamár?

Riešenie:

Poctivec. Zvážte, že každý obyvateľ ostrova o sebe tvrdí, že je poctivec.

4

N1 Pre prirodzené čísla a, b, c, d platí $ab + bc + cd + da = 77$. Určte všetky možné hodnoty ich súčtu.

Riešenie:

Jediná hodnota 18. Platí $77 = ab+bc+cd+da = (a+c)(b+d)$ a pritom $77 = 7\cdot 11$. Oba činitele $a+c$ a $b+d$ sú väčšie ako 1, takže sú v nejakom poradí rovné prvočíslam 7 a 11. Tak či onak platí $(a + c) + (b + d) = 18$. Zostáva uviesť nejakú vyhovujúcu štvoricu. Je ňou napríklad $(1, 1, 6, 10)$.

N2 Predpokladajme, že navzájom rôzne reálne čísla a, b, c, d spĺňajú nerovnosti

$$ab + cd > bc + ad > ac + bd.$$

Ak a je z týchto štyroch čísel najväčšie, ktoré z nich je najmenšie?

Riešenie:

Číslo c. Prvú zadanú nerovnosť upravte na tvar $(a-c)(b-d) > 0$, druhú na tvar $(b-a)(c-d) > 0$. Ak je a z daných štyroch čísel najväčšie, platí $a-c > 0$ a $b-a < 0$, takže z odvodených nerovností vyplýva $b-d > 0$ a $c-d < 0$, čiže $b > d$ a $c < d$, celkovo $a > b > d > c$.

D1 Nájdite všetky štvorice (a, b, c, d) celých čísel so súčtom 71 také, že $a > b > c > d$ a platí

$$(a-b)(c-d) + (a-d)(b-c) = 26.$$

Riešenie:

Ľavú stranu upravte na súčin dvoch mnohočlenov.

Kompletné riešenie: 71-C-S-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3929#page=2).

D2 Určite všetky možné hodnoty súčtu $a + b + c + d$, kde a, b, c, d sú kladné celé čísla spĺňajúce rovnosť

$$(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) + (b^2 - d^2)(c^2 - a^2) = 2021.$$

Riešenie:

Ľavú stranu upravte na súčin štyroch mnohočlenov.

Kompletné riešenie: 71-C-I-6 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3925#page=16).

D3 Na každej stene kocky je napísané kladné celé číslo. Ku každému vrcholu je pripísaný súčin troch čísel na priľahlých stenách. Súčet ôsmich čísel pri vrcholoch je 1001. Určte všetky možné hodnoty súčtu čísel na stenách.

Riešenie:

31. Ak sú a a b čísla na prednej a zadnej stene, c a d čísla na hornej a dolnej stene a e a f čísla na ľavej a pravej stene, tak roznásobením súčinu $(a + b)(c + d)(e + f)$ dostaneme osem sčítancov, ktorými sú práve čísla pripísané vrcholom kocky (v každom vrchole sa stretajú tri steny, po jednej z popísaných troch dvojíc stien). Podľa zadania je tak súčin troch čísel $a + b$, $c + d$ a $e + f$ väčších ako 1 rovný 1001, čo je súčin troch prvočísel 7, 11 a 13. Platí teda $\{a+b, c+d, e+f\} = \{7, 11, 13\}$, takže $a+b+c+d+e+f = 7+11+13 = 31$.

D4 Určte počet všetkých trojíc kladných celých čísel a, b, c, pre ktoré platí $a + ab + abc + ac + c = 2017$.

Riešenie:

K obom stranám rovnice pričítajte číslo 1, aby ste potom ľavú stranu mohli rozložiť na súčin dvoch mnohočlenov.

Kompletné riešenie: 67-B-I-4 (https://skmo.sk/dokument.php?id=2578#page=4).

5

N1 Uvažujme prirodzené čísla od 1 do 10 (vrátane). Najviac koľko z nich môžeme medzi sebou vynásobiť, aby druhá odmocnina z ich súčinu bola rovná prirodzenému číslu?

Riešenie:

9. Prvočíslo 7 v súčine byť nemôže, malo by medzi jeho prvočiniteľmi jediný výskyt. Súčin 9 ostatných čísel je $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2$, čo je $(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5)^2$.

N2 Nech n je kladné prirodzené číslo. Ukážte, že číslo $\sqrt{n}$ je celé práve vtedy, keď v rozklade čísla n na prvočinitele má každé prvočíslo párny počet výskytov.

Riešenie:

Nech $k = sqrtn$. Ak je kladné číslo k celé, z rovnosti $k^2 = n$ vyplýva, že počet výskytov každého prvočísla v rozklade čísla n je dvojnásobkom jeho výskytov v rozklade čísla k, a teda je párne. Ak je, naopak, počet výskytov každého prvočísla v rozklade čísla n párny, tak to celé číslo, ktoré má vo svojom rozklade polovičné počty týchto výskytov, je zrejme $\sqrt{n}$.

N3 a) Dokážte, že rovnosť $a^2 = 2b^2$ neplatí pre žiadne kladné prirodzené čísla a a b.

b) Dokážte, že číslo $\sqrt{2}$ je iracionálne, t. j. že sa nerovná žiadnemu zlomku a/b, kde a a b sú kladné prirodzené čísla.

c) Dokážte, že čísla $\sqrt{3}$ a $\sqrt{6}$ sú iracionálne.

Riešenie:

a) V rozklade čísel a^2 a $2b^2$ na prvočinitele má prvočíslo 2 párny, resp. nepárny počet výskytov, takže $a^2 \neq 2b^2$.

b) Z rovnosti $\sqrt{2} = a/b$ by vyplynula rovnosť $a^2 = 2b^2$ z časti a).

c) Keby sa zlomok a/b rovnal jednému z čísel $\sqrt{3}$ alebo $\sqrt{6}$, platilo by $a^2 = 3b^2$, resp. $a^2 = 6b^2$. Počet výskytov prvočísla 3 v rozklade čísla a^2 je párny, v rozklade oboch čísel $3b^2$ aj $6b^2$ je nepárny, teda $a^2 \neq 3b^2$ aj $a^2 \neq 6b^2$.

D1 Dokážte, že pre každé kladné prirodzené číslo n je číslo $\sqrt{n}$ buď celé, alebo iracionálne.

Riešenie:

Stačí ukázať, že ak číslo $\sqrt{n}$ nie je iracionálne, t. j. je rovné niektorému zlomku a/b, kde a a b sú kladné prirodzené čísla a a b, tak $\sqrt{n}$ je celé číslo. Naozaj, z rovnosti $\sqrt{n} = a/b$ upravenej na $a^2 = nb^2$ vyplýva, že počet výskytov každého prvočísla v rozklade čísla n je párny, pretože je rozdielom dvoch párnych počtov jeho výskytov v rozkladoch a^2 a b^2. Podľa N2 to znamená, že $\sqrt{n}$ je celé číslo.

D2 Kladné prirodzené číslo n je také, že číslo $6n^2 + 5n + 1$ je druhou mocninou prirodzeného čísla. Dokážte, že aj obe čísla $2n + 1$ a $3n + 1$ sú druhými mocninami prirodzených čísel.

Riešenie:

Nech $2n + 1 = a$, $3n + 1 = b$ a $6n^2 + 5n + 1 = c^2$, pričom $a, b, c \in \mathbb{N}^+$. Všimnime si, že čísla a a b sú nesúdeliteľné (lebo je s nimi zrejme nesúdeliteľný ich rozdiel $b - a$ čiže n) a pritom platí $ab = c^2$. Z toho vyplýva, že každé prvočíslo deliace a alebo b delí iba jedno z nich a má v rozklade tohto čísla rovnaký počet výskytov ako v rozklade čísla c^2, čo je párne číslo. Obe čísla a a b tak sú druhými mocninami. (Príklad existuje: Ak $n = 40$, tak $2n + 1 = 9^2$ a $3n + 1 = 11^2$.)

D3 Na tabuli je napísaných n rôznych prirodzených čísel od 1 do n. V jednom kroku zotrieme nejaké dve čísla a namiesto nich napíšeme absolútnu hodnotu ich rozdielu. Pokračujeme tak dlho, kým na tabuli nezostane jediné číslo. Pre ktoré čísla n bude toto posledné číslo nepárne nezávisle od toho, v akom poradí budeme čísla zotierať?

Riešenie:

Pre tie prirodzené n, ktoré po delení 4 dávajú zvyšok 1 alebo 2, teda 1, 2, 5, 6, 9, 10, atď. Sledujme, ako sa zmení aktuálny počet nepárnych čísel napísaných na tabuli po následnom kroku. Ak pri ňom zotrieme dve nepárne čísla, napíšeme namiesto nich číslo párne, teda počet sa zmenší o 2. Ak zotrieme jedno číslo párne a druhé nepárne, napíšeme namiesto nich číslo nepárne, a tak sa počet nezmení. K zmene tohto počtu nedôjde ani vo zvyšnom prípade, keď zotrieme dve párne čísla, lebo namiesto nich napíšeme číslo párne. Celkovo vidíme, že po žiadnom kroku nezmeníme paritu tohto počtu. Posledné číslo teda vyjde nepárne práve vtedy, keď je na úvod na tabuli nepárny počet nepárnych čísel (bez ohľadu na postup zotierania). Počet nepárnych čísel od 1 do n je v prípade $n = 4k$ rovný $2k$, v prípadoch $n = 4k + 1$ a $n = 4k + 2$ je rovný $2k + 1$, a v prípade $n = 4k + 3$ je rovný $2k + 2$.

6

N1 Vo štvorci $ABCD$ zvoľme vo vnútri strany AB ľubovoľne bod K a vo vnútri strany BC ľubovoľne bod L. Na polpriamke CD zvoľme bod M tak, aby $|\sphericalangle KLM| = 90°$. Dokážte, že trojuholníky BLK a CML sú podobné.

Riešenie:

Ukážte, že oba trojuholníky majú zhodné uhly.

N2 Na stranách AB, BC, CD, DA štvorca $ABCD$ postupne zvolíme body K, L, M, N tak, že $|AK| : |KB| = |BL| : |LC| = |CM| : |MD| = |DN| : |NA| = 2 : 1$.

a) Dokážte, že $KLMN$ je štvorec.

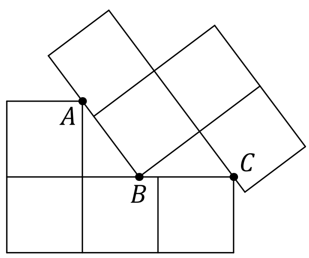
b) Určte pomer obsahov štvorcov $KLMN$ a $ABCD$.

Riešenie:

a) Podľa zadania majú pravouhlé trojuholníky AKN, BLK, CMN a DNM zhodné dvojice odvesien, takže sú zhodné podľa vety *sus*. Majú teda zhodné aj prepony a dvojice ostrých uhlov. Štvoruholník $KLMN$ tak má všetky strany zhodné a všetky uhly pravé – napríklad rovnosť $|\sphericalangle KLM| = 90°$ vyplýva z toho, že ostré uhly BLK a MLC sa dopĺňajú do 90°.

b) $5 : 9$. Nech $|AB| = 3$. Potom $S(ABCD) = 9$ a zhodné pravouhlé trojuholníky AKN, BLK, CMN a DNM majú odvesny dĺžok 1 a 2. Obsah každého z nich je 1, teda $S(KLMN) = 9 - 4 \cdot 1 = 5$.

D1 Dve tetrisové kocky zostavené zo štvorcov o rozmeroch 1×1 sa dotýkajú v bodoch A, B, C ako na obrázku. Vypočítajte $|AB|$.



Riešenie:

$|AB| = 5/4$. Na obrázku vidíme dva pravouhlé trojuholníky s preponami AB a BC, ktoré majú jednu odvesnu dĺžky 1 a zhodné k nej priľahlé uhly. Tieto dva trojuholníky sú teda podľa vety *usu* zhodné. Označme x dĺžku ich druhej odvesny. Potom $|AB| = |BC| = 2 - x$ a Pytagorova veta dáva rovnicu $1^2 + x^2 = (2 - x)^2$, odkiaľ $x = 3/4$, a preto $|AB| = 2 - x = 5/4$.

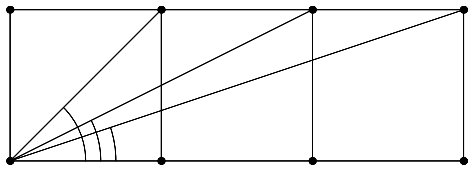
D2 Označme E stred základne AB lichobežníka $ABCD$, pričom $|AB| : |CD| = 3 : 1$. Uhlopriečka AC pretína úsečky ED, BD postupne v bodoch F, G. Určte postupný pomer $|AF| : |FG| : |GC|$.

Riešenie:

$12 : 3 : 5$. Hľadajte podobné trojuholníky. Zdôvodnite, že trojuholníky ABG a CDG sú pri tomto poradí vrcholov podobné a trojuholníky AEF a CDF s[pri tomto poradí vrcholov tiež podobné. Z prvej podobnosti vyplýva $|AG| : |CG| = 3 : 1$, z druhej $|AF| : |FC| = 3 : 2$.

Kompletné riešenie: 64-C-I-4 (https://skmo.sk/dokument.php?id=1338#page=4).

D3 Na obrázku sú vyznačené uhly medzi uhlopriečkou a stranou v troch pravouholníkoch 3×1, 2×1 a 1×1.



Dokážte, že súčet týchto troch uhlov je 90°.

Riešenie:

Trikovo zobrazíme vykreslenú uhlopriečku obdĺžnika 3×1 podľa osi danej jeho „dolnou" stranou dĺžky 3. Zdôvodnite, že táto nová úsečka je preponou pravouhlého rovnoramenného trojuholníka, ktorého jedna z odvesien je vykreslená uhlopriečka obdĺžnika 2×1. Zistíme tak, že súčet dvoch z troch zadaných uhlov je 45°.