
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Zadania úloh domáceho kola kategórie A (maďarská verzia)

1 Egy bulira 20 személy jött el, köztük 10 fiú és 10 lány. Mindegyiküknek pontosan k személy tetszik a vele ellentétes nem képviselői közül. Döntsd el, hogy biztosan lesz-e olyan pár, amelyben mindketten tetszenek egymásnak!

Oldd meg a feladatot, ha

- a) $k = 5$;
- b) $k = 6$.

(Josef Tkadlec)

2 Az 1-től 9-ig terjedő számjegyek mindegyikét pontosan egyszer használva alkotunk egy 9-jegyű számot. Ezután kiszámítjuk az egymás mellett álló számhármasok összegét és a keletkezett 7 összeget növekvő sorrendben leírjuk. Döntsd el, hogy megkaphatjuk-e így módon a következő sorozatokat:

- a) 11, 15, 16, 18, 19, 21, 22;
- b) 11, 15, 16, 18, 19, 21, 23.

(Patrik Bak)

3 Az ABC háromszög súlypontja legyen T . Legyen K a BTC félsík azon pontja, amelyre BTK egyenlőszárú derékszögű háromszög BT alappal. Legyen L a CTA félsík azon pontja, amelyre CTL egyenlőszárú derékszögű háromszög CT alappal. Jelölje D a BC oldal középpontját, E pedig a KL szakasz középpontját.

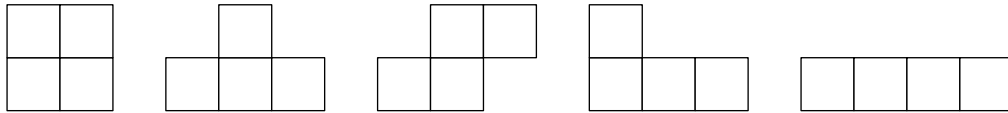
Határozd meg az $|AT| : |DE|$ arány összes lehetséges értékét!

(Michal Rolínek)

4 Egy páratlan p prímszámot *speciálisnak* nevezünk, ha a p -től kisebb prímszámok összege többszöröse p -nek. Létezik két egymást követő speciális prímszám?

(Jaroslav Zhouf)

5 Döntsd el, hogy létezik-e a 7×7 -es táblázat mezőinek egy olyan nemüres részhalmlaza, amelyre a



tetrominók mindegyikére igaz, hogy ez a részhalmlaz fedés nélkül kitölthető csak ezen tetrominó másolatainak felhasználásával. A tetrominók másolatait tetszőlegesen elforgathatjuk és át is fordíthatjuk.

(Michal Rolínek)

6 Az $[1, 2]$ zárt intervallumban található a, b, c, d valós számokra $(a + c)(b + d) = 8$. Bizonyítsd be, hogy

$$\frac{1}{a^2 + b^2 - 1} + \frac{1}{b^2 + c^2 - 1} + \frac{1}{c^2 + d^2 - 1} + \frac{1}{d^2 + a^2 - 1} \geq 1,$$

és határozd meg, mikor áll fenn egyenlőség!

(Zdeněk Pezlar)

Termín odovzdania riešení: 5. 12. 2023
