

---

# MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

## Zadania úloh domáceho kola kategórie B (maďarská verzia)

---

1 A  $\{0, 1, \dots, 9\}$  halmaznak hány olyan nemüres részhalmaza van, amelyben az elemek összege osztható 3-mal?

(Eliška Macáková)

2 Határozd meg az

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{(b+c)^3 + (c+a)^3 + (a+b)^3}$$

kifejezés összes lehetséges értékét, ha  $a, b, c$  olyan valós számok, amelyekre

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}.$$

(Michal Rolínek)

3 Legyen  $E$  az  $ABCD$  téglalap  $AD$  oldalának középpontja. A  $B$  pontból  $CE$  egyenesre vetített merőleges  $F$  talppontja legyen a  $CE$  szakasz egy belső pontja. Továbbá, jelölje  $G$  az  $F$  pontból  $AD$  oldalra húzott merőleges talppontját. Bizonyítsd be, hogy a  $CE$  egyenes felezi az  $AFG$  szöget!

(Jaroslav Švrček)

4 Döntsd el, hogy létezik-e olyan pozitív egész számokból álló

a)  $(a, a, a, a, b)$  számötös, ahol  $a, b$  egymástól különböző számok;

b)  $(a, a, b, b, c)$  számötös, ahol  $a, b, c$  egymástól különböző számok;

amelyben minden szám osztója a maradék négy számból tetszőlegesen kiválasztott három szám összegének!

(Jaroslav Zhouf)

5 Egy derékszögű háromszög beírt ill. körülírt körének a sugara  $r$  ill.  $R$ . Legyen  $r : R = 2 : 5$ . Bizonyítsd be, hogy ezen háromszög egyik oldalának hossza a másik kettő hosszának számtani középértéke!

(Mária Dományová)

6 Döntsd el, hogy egy  $4 \times 4$ -es négyzetes táblázat kitölthető-e az egymástól különböző 1-től 16-ig terjedő természetes számokkal úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban található legyen olyan szám, amelyiknek hétszerese a maradék három szám összegével egyenlő.

(Jaromír Šimša)

---

Termín odovzдания riešení: **23. 1. 2024**

---