MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Zadania úloh domáceho kola kategórie C

(maďarská verzia)

1 Létezik-e olyan 10 egymást követő természetes szám, amelyek rendre oszthatóak a 9, 7, 5, 3, 1, 1, 3, 5, 7, 9 számokkal?

(Jaroslav Zhouf)

2 Jelölje M a derékszögű ABC háromszög AC átfogójának középpontját, miközben fennáll a $|BC| = |CM|$ egyenlőség. Bizonyítsd be, hogy az ABC és ABM háromszögek köréírt köreinek sugarai egyenlő hosszúságúak!

(Michal Pecho)

3 Legyen 20 kijelentésünk:

„Pontosan 1 lánytestvérem van.“	„Pontosan 1 fiútestvérem van.“
„Pontosan 2 lánytestvérem van.“	„Pontosan 2 fiútestvérem van.“
…	…
„Pontosan 10 lánytestvérem van.“	„Pontosan 10 fiútestvérem van.“

a) Ezen 20 kijelentés közül négy édestestvér mindegyike más kijelentést tett. Lehetséges, hogy mind a négy igazat mondott?

b) Keresd meg azt a lehető legnagyobb n természetes számot, amelyre n édestestvér mindegyike különböző kijelentést tehessen ezen 20 kijelentés közül, és mindegyikük igazat mondjon!

(Josef Tkadlec)

4 Hány olyan 100 összegű pozitív egészekből álló rendezett (a, b, c, d) számnégyes létezik, amely kielégíti a következő egyenlőségeket:

$$(a + b)(c + d) = (b + c)(a + d) = (a + c)(b + d)?$$

(Patrik Bak)

5 Egy táblára felírtuk az 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ számokat. Egy lépésben a táblára felírt a, b, c számokat letöröljük, s helyükbe az ab, bc, ca számokat írjuk. Határozd meg, hogy nullától különböző számú lépés után előfordulhat-e, hogy a táblán szereplő számok valamelyike természetes szám legyen!

(Jaroslav Zhouf)

6 Adott az $ABCD$ téglalap, amelyben $|AB| : |BC| = 2 : 1$. A téglalap AB, BC, CD, DA oldalain rendre felvettük a K, L, M, N pontokat úgy, hogy $KLMN$ egy olyan téglalapot alkot amelyben $|KL| : |LM| = 3 : 1$. Számold ki az $ABCD$ és $KLMN$ téglalapok területeinek arányát!

(Josef Tkadlec)

Termín odovzdania riešení: **23. 1. 2024**