MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z9

1 Pat a Mat si dali preteky v behu do svojej chalúpky. V istom okamihu platilo, že keby Mat mal zdolanú polovicu vzdialenosti, ktorú doteraz ubehol, chýbal by mu do chalúpky trojnásobok tejto polovičnej vzdialenosti. V tom istom okamihu platilo, že keby Pat mal zdolaný dvojnásobok vzdialenosti, ktorú doteraz ubehol, chýbala by mu do chalúpky tretina tejto dvojnásobnej vzdialenosti.

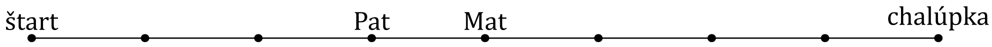
Kto bol v danom okamihu bližšie k chalúpke?

(Libuše Hozová)

Riešenie:

Ak by Matovi do chalúpky chýbal trojnásobok ubehnutej vzdialenosti, tak by bol v štvrtine. Tento prípad by nastal, keby mal zdolanú polovicu vzdialenosti, ktorú doteraz ubehol. Teda Mat sa v danom okamihu nachádzal v polovici medzi štartom a chalúpkou.

Ak by Patovi do chalúpky chýbala tretina ubehnutej vzdialenosti, tak by bol v troch štvrtinách. Tento prípad by nastal, keby mal zdolaný dvojnásobok vzdialenosti, ktorú doteraz ubehol. Teda Pat sa v danom okamihu nachádzal v troch osminách medzi štartom a chalúpkou. V danom okamihu bol bližšie k chalúpke Mat.



Poznámka:

Ak m a p postupne označujú Matovu a Patovu vzdialenosť od štartu v danom okamihu a c označuje celú vzdialenosť medzi štartom a chalúpkou, tak informácie zo zadania doslovne zapíšeme takto:

$$\frac{1}{2}m + 3\left(\frac{1}{2}m\right) = c,$$

$$2p + \frac{1}{3}(2p) = c.$$

Odtiaľ jednoducho dostávame $2m = c$, teda $m = \frac{1}{2}c$, a $\frac{8}{3}p = c$, teda $p = \frac{3}{8}c$.

2 Zostrojte kosoštvorec $ABCD$ taký, že platí $|AC| = 8$ cm a $|AS| = 7$ cm, kde S je stredom strany CD.

(Karel Pazourek)

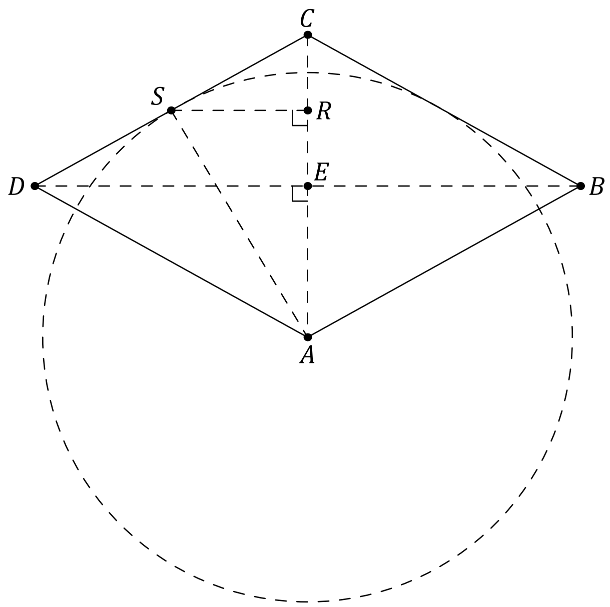
Riešenie 1:

Využijeme to, že uhlopriečky v rovnobežníku sa navzájom rozpoľujú a v kosoštvorci sú navyše kolmé. Označme priesečník uhlopriečok AC a BD ako E a stred úsečky EC ako R. Úsečka SR je strednou priečkou trojuholníka DEC, ktorá je rovnobežná so stranou DE. Úsečka SR je preto kolmá na AC. V pravouhlom trojuholníku ARS poznáme veľkosť prepony AS, čo je 7 cm, a veľkosť odvesny AR, čo je $\frac{3}{4}|AC|$ čiže 6 cm. Tento trojuholník naozaj existuje a možno ho zostrojiť napr. takto:

1. úsečka AR s veľkosťou 6 cm,
2. kolmica na úsečku AR idúca bodom R,
3. kružnica so stredom v bode A a polomerom 7 cm,
4. priesečník S tejto kolmice a kružnice.

Zvyšné vrcholy kosoštvorca možno zostrojiť takto:

5. bod C leží na polpriamke AR vo vzdialenosti 8 cm od A,
6. bod D je stredovo súmerný s bodom C podľa stredu S,
7. bod B je osovo súmerný s bodom D podľa osi AC.



Poznámka:

Trojuholníky ACB a ACD vyzerajú takmer rovnostranne, ale nie sú. Najmä neplatí, že sa kružnica v prvom obrázku dotýka úsečky CD, aj keď to tak môže vyzerať.

Poznámka:

Hlavnú pozornosť venujeme konštrukcii trojuholníka ARS. Konštrukcie súmerných bodov D a B považujeme za dobre známe, teda detailne nerozpisujeme. Priesečníky vo štvrtom kroku konštrukcie sú dva. Druhá možnosť vedie k tomu istému riešeniu s inak označenými vrcholmi. Čiastkové konštrukcie je možné realizovať rôzne. Napr. pre danú úsečku AC je možné body E a R postupne zostrojiť ako stredy úsečiek AC a EC, bod D je možné zostrojiť ako priesečník priamky CS s kolmicou na AC idúcou bodom E a podobne. Pravouhlý trojuholník ARS je možné zostrojiť aj takto:

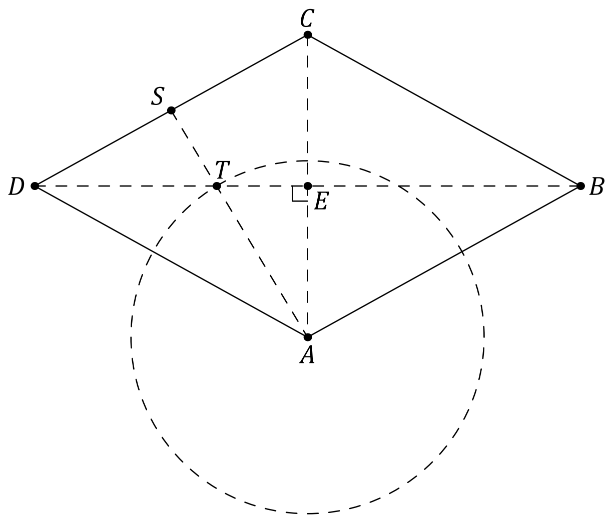
1. úsečka AS s veľkosťou 7 cm,
2. kružnica so stredom v bode A a polomerom 6 cm,
3. kružnica s priemerom AS,
4. priesečník R týchto kružníc.

Podľa Tálesovej vety je uhol pri vrchole R naozaj pravý.

Riešenie 2:

Využijeme to, že úsečky AS a DE sú ťažnicami trojuholníka ACD. Navyše si uvedomujeme, že uhlopriečky v kosoštvorci sú navzájom kolmé. Označme priesečník uhlopriečok AC a BD ako E a priesečník ťažníc AS a DE, t. j. ťažisko, ako T. Ťažisko leží v tretine každej ťažnice, bližšie k strane trojuholníka. V pravouhlom trojuholníku AET teda poznáme veľkosť prepony AT, čo je $\frac{2}{3}\,|AS|$ čiže $\frac{14}{3}$ cm, a veľkosť odvesny AE, čo je $\frac{1}{2}\,|AC|$, čo je 4 cm. Vzhľadom na to, že $\frac{14}{3}\,\text{cm} > 4\,\text{cm}$, trojuholník AET naozaj existuje a je ho možné zostrojiť podobne ako trojuholník ARS v riešení uvedenom vyššie. Zvyšné vrcholy kosoštvorca možno zostrojiť napr. takto:

1. bod D leží na polpriamke ET vo vzdialenosti $3\,|ET|$ od E,
2. bod B je stredovo súmerný s bodom D podľa stredu E,
3. bod C je stredovo súmerný s bodom A podľa stredu E.



Poznámka:

V uvedenom riešení je potrebné rozdeliť danú úsečku na tretiny. Korektné riešenie tejto podúlohy považujeme za dobre známe, teda detailne nerozpisujeme. Predchádzajúca poznámka súvisí s faktom, že trojuholníky AET a ARS sú podobné s koeficientom podobnosti $2/3$.

---

3 V základnej škole, kam chodí aj Žigmund, každoročne organizujú vedomostnú súťaž, v ktorej každý súťažiaci môže získať najviac 15 bodov. Tento rok bol priemerný bodový zisk súťažiacich zaokrúhlený na desatiny rovný 10,4. Žigmund si po súťaži uvedomil, že niektoré otázky si zle prečítal a odpovedal na niečo iné. Mohol tak mať o 4 body viac, a priemerný bodový zisk zaokrúhlený na desatiny by sa tým zvýšil na 10,6.

Určte, koľko najmenej a koľko najviac detí mohlo tento rok súťažiť.

(Michaela Petrová)

Riešenie:

Pracujeme so zaokrúhlenými číslami, teda skutočný priemerný bodový zisk mohol byť v rozsahu od 10,35 (vrátane) po 10,45 (toto číslo sa už zaokrúhľuje na 10,5). Ak n označuje počet účastníkov súťaže a c celkový súčet bodov získaných všetkými súťažiacimi, tak predchádzajúcu podmienku zapíšeme takto:

$$10{,}35 \leq \frac{c}{n} < 10{,}45.$$

Podobnou úvahou zisťujeme, že ďalšia podmienka zo zadania znamená

$$10{,}55 \leq \frac{c+4}{n} < 10{,}65.$$

Vzhľadom na to, že $\frac{c+4}{n} = \frac{c}{n} + \frac{4}{n}$ a že sčítanec $\frac{c}{n}$ je ohraničený v predošlým vzťahom, postupne dostávame

$$10{,}55 - \frac{c}{n} \leq \frac{4}{n} < 10{,}65 - \frac{c}{n},$$

$$0{,}1 < \frac{4}{n} < 0{,}3.$$

Ďalšími ekvivalentnými úpravami nájdeme ohraničenie pre n:

$$10 > \frac{n}{4} > \frac{10}{3},$$

$$40 > n > \frac{40}{3},$$

t. j.

$$39 \geq n \geq 14.$$

Ostáva overiť, že pre každé takéto n existuje vyhovujúca situácia, t. j. že môžu byť splnené podmienky, že každý súťažiaci môže získať najviac 15 bodov a Žigmund najviac 11 bodov. Priemerná hodnota bodového zisku je $\frac{c}{n}$, čo je najviac 10,45, stačí teda, keď každý súťažiaci získa práve túto bodovú hodnotu, lebo tá je najviac 11, a teda aj najviac 15.

Súťaže sa zúčastnilo najmenej 14 a najviac 39 detí.

Poznámka:

Všimnime si, že v predchádzajúcom ohraničení sú obe nerovnosti ostré: Pre spodný odhad odčítame od 10,55 najväčšiu možnú hodnotu $\frac{c}{n}$, a tá je ostro menšia ako 10,45. Pre horný odhad odčítame od hodnoty menšej ako 10,65 najmenšiu možnú hodnotu $\frac{c}{n}$, a tá je 10,35.

Informácia o maximálnom počte bodov, ktoré môže získať každý súťažiaci, je nadbytočná.

Poznámka:

K možným počtom súťažiacich sa dá dopracovať aj skúšaním možností. Za predpokladu, že hodnoty priemerných bodových ziskov sú presné, by podmienky

$$10{,}35 \leq \frac{c}{n} < 10{,}45,$$

$$10{,}55 \leq \frac{c+4}{n} < 10{,}65$$

boli nahradené rovnosťami

$$\frac{c}{n} = 10{,}4,$$

$$\frac{c+4}{n} = 10{,}6.$$

Dosadením prvej rovnosti do druhej a úpravou dostávame $\frac{4}{n} = 0{,}2$, teda $n = 20$. To je vyhovujúci počet súťažiacich a ostatné vyhovujúce možnosti možno nájsť skúšaním okolitých čísel a overovaním podmienok zo zadania. Nie je nutné postupovať úplne systematicky, stačí nájsť hraničné hodnoty, pre ktoré podmienky platia, ale pre nasledovníka, resp. predchodcu neplatia. Napr. overenie pre horné ohraničenie počtu súťažiacich vyzerá takto:

- Prvá podmienka v prípade $n = 39$ a jej postupné úpravy dávajú

$$10{,}35 \leq \frac{c}{39} < 10{,}45,$$

$$403{,}65 \leq c < 407{,}55,$$

$$407{,}65 \leq c + 4 < 411{,}55,$$

$$10{,}4525641 < \frac{c+4}{39} < 10{,}5525642.$$

  Tieto ohraničenia nie sú v spore s ohraničeniami

$$10{,}55 \leq \frac{c+4}{n} < 10{,}65,$$

  iba ich spresňujú. Teda počet súťažiacich mohol byť 39.

- Prvá podmienka v prípade $n = 40$ a jej postupné úpravy dávajú

$$10{,}35 \leq \frac{c}{40} < 10{,}45,$$

$$414 \leq c < 418,$$

$$418 \leq c + 4 < 422,$$

$$10{,}45 \leq \frac{c+4}{40} < 10{,}55.$$

  Tieto ohraničenia sú v spore s ohraničeniami

$$10{,}55 \leq \frac{c+4}{n} < 10{,}65.$$

  Teda počet súťažiacich nemohol byť 40.

4 Karol mal vynásobiť dve dvojciferné čísla. Z nepozornosti vymenil poradie cifier v jednom z činiteľov a dostal súčin, ktorý bol o 4 248 menší ako správny výsledok.

Koľko malo Karolovi správne vyjsť?

(Libuše Hozová)

Riešenie:

Označme x a y Karolove dvojciferné čísla a povedzme, že cifry vymenil v prvom čísle. Ak cifry čísla x označíme a a b, tak platí

$$(10a + b)y - (10b + a)y = 4248.$$

Po úprave dostávame $9(a-b)y = 4248$, t. j. $(a-b)y = 472$. Odtiaľ vyplýva, že číslo y je dvojciferným deliteľom čísla 472.

Prvočíselný rozklad čísla 472 je $2^3 \cdot 59$, teda jeho jediným dvojciferným deliteľom je 59. To znamená, že $a-b = 8$. Tejto podmienke vyhovujú nasledujúce dve možnosti:

- $a = 8$ a $b = 0$, teda $(10a + b)y = 80 \cdot 59 = 4720$,
- $a = 9$ a $b = 1$, teda $(10a + b)y = 91 \cdot 59 = 5369$.

Karolovi malo správne vyjsť buď 4720, alebo 5369.

Poznámka:

Po zámene cifier v prvom prípade dostávame 08, čo síce nie je dvojciferné číslo, ale to zadanie úlohy ani nepožaduje.

---

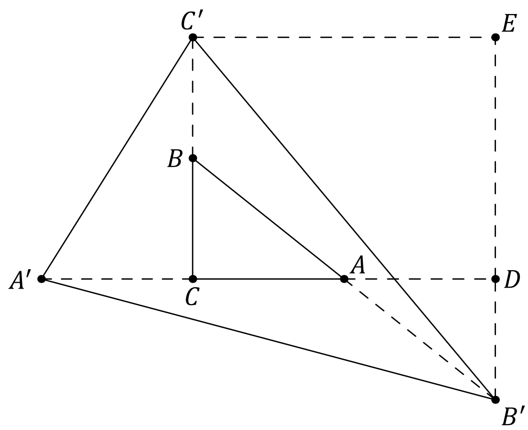
5 Trojuholník ABC je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole C. Body A', B', C' sú obrazy bodov A, B, C postupne v stredových súmernostiach so stredmi C, A, B. Dokážte, že platí

$$|A'B'|^2 + |B'C'|^2 + |C'A'|^2 = 14 \cdot |AB|^2 .$$

(Jaroslav Zhouf)

Riešenie:

Nech D je obraz bodu C v stredovej súmernosti podľa bodu A a E je bod taký, že $C'CDE$ je obdĺžnik.



Podľa Pytagorovej vety v trojuholníkoch $A'DB'$, $B'EC'$ a $C'CA'$ potom platí

$$|A'B'|^2 = |A'D|^2 + |DB'|^2 = (|A'C| + |CD|)^2 + |DB'|^2$$
$$= (|CA| + 2\,|CA|)^2 + |CB|^2 = (3\,|CA|)^2 + |CB|^2 = 9\,|CA|^2 + |CB|^2 ,$$

ďalej

$$|B'C'|^2 = |C'E|^2 + |B'E|^2 = |CD|^2 + (|B'D| + |DE|)^2 = |CD|^2 + (|CB| + |CC'|)^2$$
$$= (2\,|CA|)^2 + (|CB| + 2\,|CB|)^2 = (2\,|CA|)^2 + (3\,|CB|)^2 = 4\,|CA|^2 + 9\,|CB|^2$$

a

$$|C'A'|^2 = |CA'|^2 + |CC'|^2 = |CA|^2 + (2\,|CB|)^2 = |CA|^2 + 4\,|CB|^2 .$$

Z toho podľa Pytagorovej vety v trojuholníku ABC dostávame

$$|A'B'|^2 + |B'C'|^2 + |C'A'|^2 = (9\,|CA|^2 + |CB|^2) + (4\,|CA|^2 + 9\,|CB|^2) + (|CA|^2 + 4\,|CB|^2)$$
$$= 14\,|CA|^2 + 14\,|CB|^2 = 14(|CA|^2 + |CB|^2) = 14\,|AB|^2 .$$

---

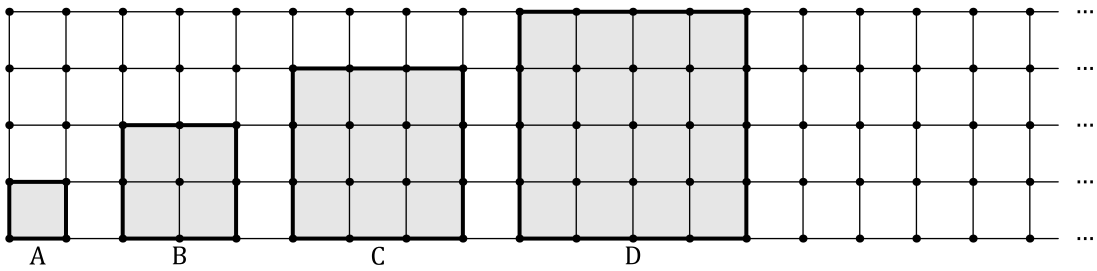
6 Určte počet štvorcov, ktorých všetky vrcholy sú mrežovými bodmi štvorcovej siete pozostávajúcej zo 4 riadkov a 2023 stĺpcov.

(Karel Pazourek)

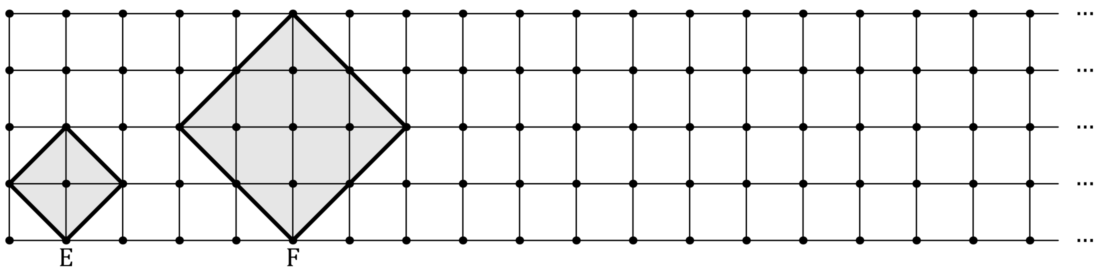
Riešenie:

Najmenší štvorec s vrcholmi v uzlových bodoch má rozmery 1×1, najväčší má rozmery 4×4. V rámci týchto obmedzení nájdeme ďalšie prípady, ktoré rozlíšime nasledovne.

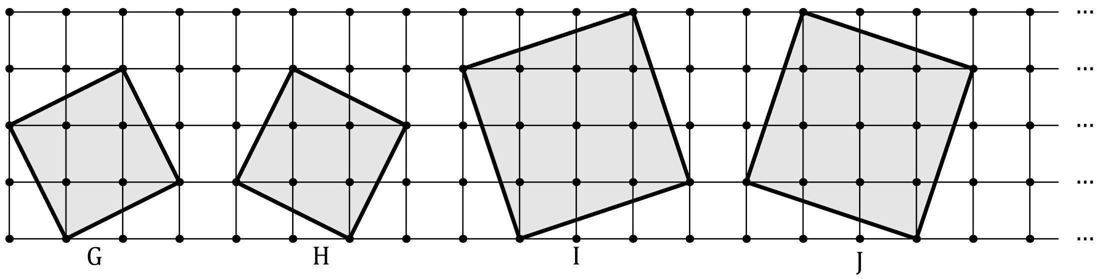
- Štvorce so stranami rovnobežnými vzhľadom k sieti:



- Štvorce so stranami uhlopriečnymi vzhľadom k sieti:



- Ostatné štvorce:



Pre samotné počítanie štvorcov istého typu nie je podstatné ich natočenie, ale iba to, koľko jednotiek zaberajú vo vodorovnom a zvislom smere. Teda štvorcov typu B je v sieti rovnaký počet ako štvorcov typu E. Štvorcov typu C je v sieti rovnaký počet ako štvorcov typu G, resp. H. Štvorcov typu D je v sieti rovnaký počet ako štvorcov typu F, čo je rovnako ako štvorcov typu I, resp. J. Stačí teda spočítať štvorce štyroch typov:

- Štvorec typu A môžeme vo zvislom smere umiestniť 4 spôsobmi, vo vodorovnom smere 2023 spôsobmi. Takých štvorcov je teda $4 \cdot 2023$ čiže 8092.
- Štvorec typu B (resp. E) môžeme vo zvislom smere umiestniť 3 spôsobmi, vo vodorovnom smere 2022 spôsobmi. Takých štvorcov je $3 \cdot 2022$ čiže 6066.
- Štvorec typu C (resp. G a H) môžeme vo zvislom smere umiestniť 2 spôsobmi, vo vodorovnom smere 2021 spôsobmi. Takých štvorcov je $2 \cdot 2021$ čiže 4042.
- Štvorec typu D (resp. F, I a J) môžeme vo zvislom smere umiestniť jediným spôsobom, vo vodorovnom smere 2020 spôsobmi. Takých štvorcov je $1 \cdot 2020$ čiže 2020.

Počet štvorcov, ktorých všetky vrcholy sú uzlovými bodmi siete, je

$$1 \cdot 8092 + 2 \cdot 6066 + 3 \cdot 4042 + 4 \cdot 2020$$

čiže 40 430.