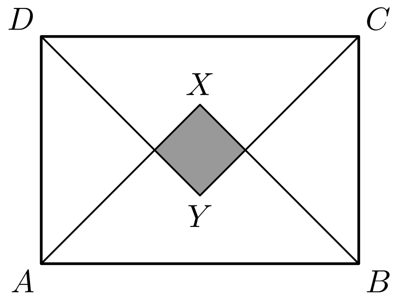
61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012

Riešenia úloh krajského kola kategórie Z9

Informácia pre krajskú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 12 alebo viac bodov.

1. *Na obr. 1 je obdĺžnik $ABCD$, ktorého dĺžky strán AB a BC sú v pomere $7:5$. Vnútri obdĺžnika $ABCD$ ležia body X a Y tak, že trojuholníky ABX a CDY sú pravouhlé rovnoramenné s pravými uhlami pri vrcholoch X a Y. Spoločná sivá plocha oboch trojuholníkov tvorí štvorec s obsahom $72\,\mathrm{cm}^2$. Určte dĺžky strán AB a BC obdĺžnika $ABCD$.* (L. Šimůnek)

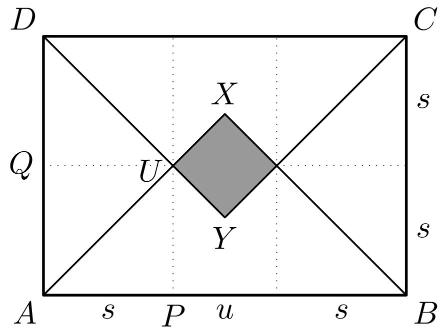


Obr. 1

Riešenie. Vypočítame dĺžku u uhlopriečky sivého štvorca, pričom vyjdeme zo vzťahu pre výpočet obsahu štvorca $S = \frac{1}{2}u^2$:

$$u = \sqrt{2S} = \sqrt{2 \cdot 72} = \sqrt{144} = 12\,(\mathrm{cm}).$$

Jeden nepomenovaný vrchol sivého štvorca označíme U (obr. 2).



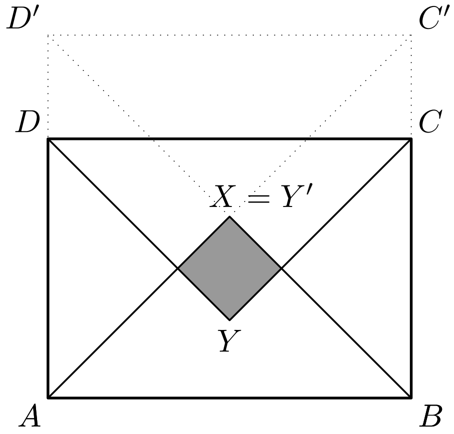
Obr. 2

Z bodu U spustíme kolmicu na stranu AB a potom na stranu DA. Ich päty označíme P a Q. Uhol XAB je vnútorným uhlom pravouhlého rovnoramenného trojuholníka ABX a má teda veľkosť $45°$. Odtiaľ vyplýva, že pravouholník $APUQ$ je štvorec. Na obr. 2 ukazujeme tri ďalšie analogicky zostrojené štvorce. Dĺžku strany týchto štvorcov označíme s. Z obr. 2 je zrejmé, že $|AB| = 2s + 12$ (cm) a $|BC| = 2s$. Tieto výrazy dosadíme do pomeru uvedeného v zadaní. Úpravami vzniknutej rovnice získame $2s$:

$$\begin{aligned}\frac{|AB|}{|BC|} &= \frac{7}{5},\\ \frac{2s+12}{2s} &= \frac{7}{5},\\ 10s + 60 &= 14s,\\ 2s &= 30\,(\mathrm{cm}).\end{aligned}$$

Dĺžka strany AB je $30 + 12 = 42$ (cm) a dĺžka strany BC je 30 cm.

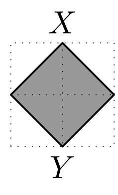
Iné riešenie. V zadanom obrázku posunieme trojuholník CDY tak, aby sa bod Y zobrazil do bodu X (obr. 3). Posunieme ho teda o dĺžku úsečky XY a rovnako ako v predchádzajúcom riešení určíme, že táto dĺžka je 12 cm.



Obr. 3

Vzhľadom na to, že trojuholníky ABX a $C'D'Y'$ sú pravouhlé rovnoramenné, vzniknutý pravouholník $ABC'D'$ musí byť štvorec. Úsečka AB predstavuje podľa zadania 7 dielov a úsečka BC 5 dielov. Úsečka BC' je o 12 cm dlhšia ako BC a predstavuje tiež 7 dielov. Dva diely sú teda 12 cm, jeden diel je potom 6 cm. Dĺžka strany AB je $7 \cdot 6 = 42$ (cm) a dĺžka strany BC je $5 \cdot 6 = 30$ (cm).

Poznámka. Dĺžku uhlopriečky sivého štvorca možno určiť aj nasledovne. Priesečník uhlopriečok zobrazíme v osovej súmernosti podľa jednotlivých strán štvorca (obr. 4). Získané štyri body tvoria vrcholy štvorca, ktorý má dvojnásobný obsah ako sivý štvorec, t. j. $2 \cdot 72 = 144\,(\mathrm{cm}^2)$. Dĺžka strany vzniknutého štvorca, a teda aj dĺžka úsečky XY, je rovná $\sqrt{144} = 12$ (cm).



Obr. 4

Návrh hodnotenia. 1 bod za výpočet uhlopriečky sivého štvorca; 3 body za poznatok a zdôvodnenie, že rozdiel dĺžok strán AB a BC je rovný dĺžke tejto uhlopriečky; 2 body za výpočet strán AB a BC.

2. *Marienka mala desať kartičiek, na ktoré napísala desať po sebe idúcich prirodzených čísel, na každú kartičku práve jedno. Nešťastnou náhodou však jednu kartičku stratila. Súčet čísel na zostávajúcich deviatich kartičkách bol* 2 012. *Zistite, aké číslo bolo napísané na stratenej kartičke.* (*L. Hozová*)

Riešenie. Najmenšie z desiatich napísaných čísel označme p. Čísla na kartičkách potom boli:

$$p,\ p+1,\ p+2,\ p+3,\ \dots,\ p+9.$$

Súčet čísel na všetkých desiatich kartičkách bol $10p+45$.

Najskôr predpokladajme, že sa stratila kartička s číslom p. Potom by platila nasledujúca rovnosť:

$$\begin{aligned}(10p+45)-p&=2\,012,\\ 9p&=1\,967.\end{aligned}$$

Z predchádzajúceho riadku je zrejmé, že p by v tomto prípade nebolo prirodzené číslo. Predpoklad, že sa stratila kartička s číslom p, preto zavrhujeme.

Teraz predpokladajme, že sa stratila kartička s číslom $p+1$. Podobne zavrhneme aj túto možnosť:

$$\begin{aligned}(10p+45)-(p+1)&=2\,012,\\ 9p&=1\,968.\end{aligned}$$

Rovnako odmietneme aj predpoklad, že sa stratila kartička s číslom $p+2$:

$$\begin{aligned}(10p+45)-(p+2)&=2\,012,\\ 9p&=1\,969.\end{aligned}$$

Stratiť sa nemohla ani kartička s číslom $p+3$:

$$\begin{aligned}(10p+45)-(p+3)&=2\,012,\\ 9p&=1\,970.\end{aligned}$$

Až za predpokladu, že sa stratila kartička s číslom $p+4$, dôjdeme k celočíselnej hodnote p:

$$\begin{aligned}(10p+45)-(p+4)&=2\,012,\\ 9p&=1\,971,\\ p&=219.\end{aligned}$$

Ostáva nám diskutovať ďalších päť možností, teda straty kartičiek s číslami $p+5$ až $p+9$. V predchádzajúcich diskusiách dostávame vždy rovnicu, ktorá má na ľavej strane iba číslo $9p$. Čísla na pravej strane týchto rovníc sa postupne zväčšujú o 1. Práve sme dostali na pravej strane číslo deliteľné deviatimi, a preto sa v nasledujúcich piatich diskusiách číslo deliteľné deviatimi vyskytovať nemôže. Úloha má tak jediné riešenie: stratila sa kartička s číslom $p+4=219+4=223$.

Iné riešenie. Najmenšie z desiatich napísaných čísel označme p. Čísla na kartičkách potom boli:

$$p,\ p+1,\ p+2,\ p+3,\ \dots,\ p+9.$$

Číslo na stratenej kartičke označme $p+c$, pričom c predstavuje jednociferné prirodzené číslo alebo nulu. Súčet čísel na všetkých desiatich kartičkách bol $10p+45$. Súčet čísel na deviatich kartičkách, ktoré zvýšili po strate, bol $10p+45-(p+c)$, po úprave $9p+45-c$. Dostávame tak rovnicu, ktorú upravíme nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned} 9p+45-c &= 2\,012,\\ 9p &= 1\,967+c. \end{aligned}$$

Súčet na pravej strane tejto rovnice musí byť deliteľný deviatimi. Pri delení $1\,967 : 9$ dostaneme výsledok 218 a zvyšok 5. Platí teda $1\,967 = 9 \cdot 218 + 5$. Z tohto rozkladu je zrejmé, že súčet $1967 + c$ je deliteľný deviatimi jedine pre $c = 4$. Neznáma p je potom rovná 219 a číslo na stratenej kartičke bolo $p + c = 219 + 4 = 223$.

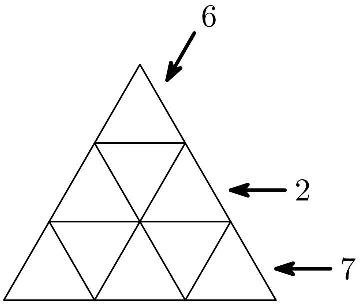
Návrh hodnotenia. 1 bod za vyjadrenie súčtu čísel na desiatich kartičkách, t. j. napr. $10p + 45$; 2 body za výsledok; 3 body za popis postupu.

Ak súťažiaci postupuje ako my v prvom uvedenom riešení a po nájdení celočíselného p prestane bez akéhokoľvek zdôvodnenia preverovať ďalšie možnosti, strhnite 1 bod.

Poznámka. Súťažiaci môžu úlohu riešiť aj „odhadom“ pomocou aritmetického priemeru čísel na deviatich zvyšných kartičkách: $2\,012 : 9 = 223$, zvyšok 5. Skusmo vypíšu napr. deväť po sebe idúcich prirodzených čísel takých, aby 223 bolo uprostred: $219 + 220 + \dots + 227 = 2\,007$. Následne uvažujú, ako možno ľavú stranu „zväčšiť“ o 5… Ak v takejto práci nie je zdôvodnené, že úloha má skutočne iba jedno riešenie, dajte za ňu maximálne 5 bodov.

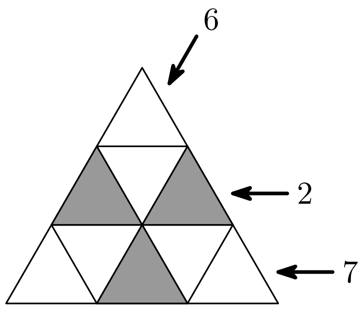
---

3. *Zistite, koľkými rôznymi spôsobmi sa dajú do jednotlivých políčok trojuholníka na obr. 5 vpísať čísla* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 *a* 9 *tak, aby súčet v každom štvorpolíčkovom trojuholníku bol* 23 *a aby na niektorom políčku v smere každej šípky bolo vpísané číslo zadané pri šípke.* (*E. Novotná*)



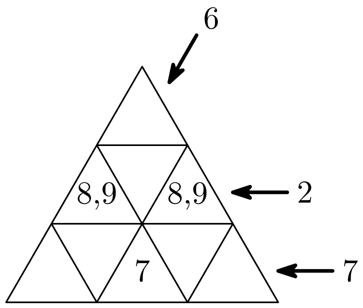
Obr. 5

Riešenie. Súčet všetkých vpísaných čísel je $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$. V obrázku sú práve tri štvorpolíčkové trojuholníky a súčet štvoríc čísel vpísaných do týchto trojuholníkov je dohromady $3 \cdot 23 = 69$. V tomto súčte sú však čísla na sivých políčkach na obr. 6 započítané dvakrát (každé patrí do dvoch štvorpolíčkových trojuholníkov), ostatné čísla jedenkrát. Súčet čísel na troch sivých políčkach preto musí byť $69 - 45 = 24$.



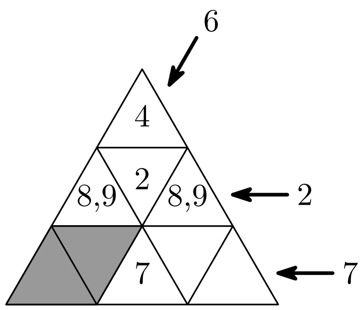
Obr. 6

Keďže najväčší možný súčet troch vpísaných čísel je práve $9+8+7=24$, v sivých políčkach musia byť čísla 7, 8 a 9. Zo zadania vieme, že 7 má byť v spodnom riadku, v krajných políčkach druhého riadku potom musia byť 8 a 9.



Obr. 7

Pre číslo 2 tak zostáva jediné voľné miesto (obr. 7). V hornom štvorpolíčkovom trojuholníku teraz chýba jediné číslo, ktoré tým pádom vieme doplniť: $23-8-9-2=$ $=4$.

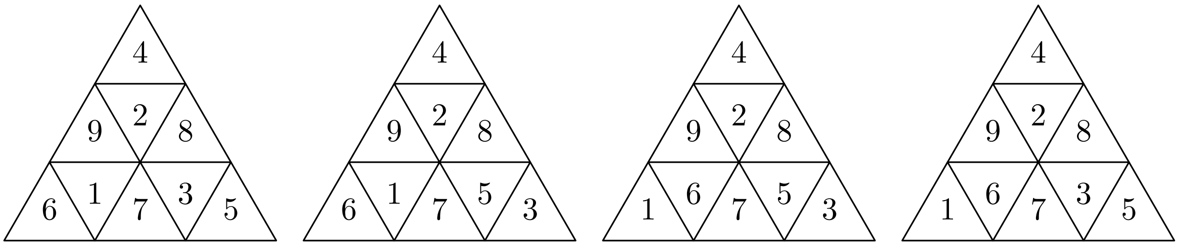


Obr. 8

Číslo 6 musí byť na niektorom sivom políčku na obr. 8, patrí teda do ľavého štvorpolíčkového trojuholníka. Keby tento trojuholník obsahoval číslo 8, tak posledné voľné políčko by obsahovalo číslo $23-8-7-6=2$, čo nie je možné (číslo 2 je už umiestnené v druhom riadku). Ľavý štvorpolíčkový trojuholník preto má vo svojom hornom políčku číslo 9 a v poslednom neobsadenom políčku je $23-9-7-6=1$. V sivých políčkach na obr. 8 sú preto čísla 1 a 6, ktoré môžeme umiestniť dvoma spôsobmi.

Na zatiaľ neobsadených miestach v pravom štvorpolíčkovom trojuholníku môžu byť jedine čísla 3 a 5; súčet v tomto trojuholníku vychádza naozaj $8+7+3+5=23$. Čísla

3 a 5 môžeme doplniť opäť dvoma spôsobmi. Úloha má teda celkom $2 \cdot 2 = 4$ riešenia (obr. 9).



Obr. 9

Návrh hodnotenia. 3 body za vysvetlenie, kde sa nachádzajú čísla 7, 8 a 9; 1 bod za doplnenie čísel 2 a 4; 1 bod za doplnenie čísel 6 a 1; 1 bod za správny počet riešení.

Ak riešiteľ nájde náhodne (bez bodovateľného vysvetlenia) jedno správne riešenie, dajte 1 bod; za dve riešenia 2 body; za tri a štyri riešenia 3 body.

---

4. *Vojto chcel na kalkulačke sčítať niekoľko trojciferných prirodzených čísel. Na prvý pokus dostal výsledok* 2 224. *Pre kontrolu sčítal tieto čísla ešte raz a vyšlo mu* 2 198. *Preto sčítal čísla ešte raz a teraz dostal súčet* 2 204. *Piate pripočítavané číslo bolo totiž prekliate – Vojto pri každom pokuse nestlačil niektorú z jeho cifier dostatočne silno a do kalkulačky zadal vždy namiesto trojciferného čísla len dvojciferné. Žiadne ďalšie chyby pri sčitovaní neurobil. Aký je správny súčet Vojtových čísel?* (*L. Šimůnek*)

Riešenie. Prekliate číslo nazveme $\overline{ABC}$. Vojto však namiesto neho pripočítal dvojciferné čísla $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, všeobecne ich budeme označovať ako ??. Ďalej označíme $****$ súčet čísel, ktoré Vojto dokázal sčítať bez preklepu. Platia schematicky vyjadrené sčítania:

$$\begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ & & ? & ? \\ \hline 2 & 2 & 2 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ & & ? & ? \\ \hline 2 & 1 & 9 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ & & ? & ? \\ \hline 2 & 2 & 0 & 4 \end{array}$$

Prvý a tretí uvedený súčet má rovnakú cifru na mieste jednotiek, v týchto prípadoch teda na miesto označené ?? patria čísla $\overline{AC}$ a $\overline{BC}$. Zvyšné číslo $\overline{AB}$ tak patrí k súčtu 2 198. Súčet 2 224 je o 26 väčší ako 2 198, a preto nemohol vzniknúť sčítaním čísla $****$ a čísla $\overline{AC}$, ktoré sa od čísla $\overline{AB}$ líši len cifrou na mieste jednotiek. Čísla $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ tak máme jednoznačne priradené k súčtom:

$$\begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ & & B & C \\ \hline 2 & 2 & 2 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ & & A & B \\ \hline 2 & 1 & 9 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ & & A & C \\ \hline 2 & 2 & 0 & 4 \end{array}$$

Podľa prvého a tretieho súčtu platí: $B = A + 2$. Podľa druhého a tretieho súčtu platí: $C = B + 6$, po dosadení predošlého vzťahu dostaneme: $C = A + 2 + 6 = A + 8$. Písmeno A je podľa zadania nenulové jednociferné číslo, a aby aj C vychádzalo jednociferné, môže byť A jedine 1. Potom $B = 3$ a $C = 9$. Prekliate číslo bolo teda 139. Súčet $****$ vypočítame napríklad takto: $2\,224 - 39 = 2\,185$. Správne mal Vojtovi vyjsť súčet $2\,185 + 139 = 2\,324$.

Poznámka. Pre vyriešenie úlohy nie je nutné stanovovať cifry B a C. K záveru môžeme dôjsť bez znalosti týchto cifier, teda bez znalosti prekliateho čísla, a síce takto: $2\,224 + \overline{A00} = 2\,224 + 100 = 2\,324$.

Návrh hodnotenia. 2 body za priradenie pozícií vynechaných cifier k jednotlivým súčtom; 3 body za výpočet vynechaných cifier (v určitom type postupu môže stačiť len cifra A, ako je naznačené v poznámke); 1 bod za správny výsledný súčet.

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori:	Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Marie Krejčová, Martin Mach, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Erika Novotná, Marta Volfová, Vojtěch Žádník
Recenzenti:	Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Erika Novotná, Vojtěch Žádník
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012