MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Riešenia úloh krajského kola kategórie A

1 Tabuľku 3×3 vyplníme navzájom rôznymi prirodzenými číslami od 1 do 9. Potom vypočítame súčet čísel v každom zo štyroch štvorcov 2×2 a tieto štyri súčty zapíšeme vzostupne. Rozhodnite, či tak môžeme získať postupnosť

a) $(24, 24, 25, 25)$,

b) $(20, 23, 26, 29)$.

(Tomáš Bárta)

Riešenie 1:

Pred uvedením riešenia poznamenajme, že oba súčty čísel v daných štvoriciach $(24, 24, 25, 25)$ a $(20, 23, 26, 29)$ sú 98. Ako ukážeme v riešení časti b), je to najvyššia možná hodnota takého súčtu, ktorú navyše dosiahneme práve pri tých tabuľkách, ktoré majú číslo 9 uprostred a čísla 1, 2, 3, 4 v rohoch. Tento poznatok zároveň uľahčuje konštrukciu potrebného príkladu tabuľky na riešenie časti a).

a) Túto postupnosť môžeme dostať napríklad pre nasledujúcu tabuľku:

1	8	2
6	9	5
3	7	4

b) Túto postupnosť nemôžeme dostať.

Uvažujme hodnotu súčtu S, ktorý dostaneme sčítaním štyroch súčtov zo štvorcov 2×2 vyplnenej tabuľky. Do súčtu S prispieva jedno číslo tabuľky štyrikrát (nazveme ho „stredovým“), štyri jej čísla dvakrát (čísla „postranné“) a zvyšné štyri čísla jedenkrát (čísla „rohové“). Preto súčet S bude najväčší možný, ak najväčšie číslo 9 bude stredové, štyri menšie čísla 8, 7, 6, 5 postranné a štyri najmenšie čísla 4, 3, 2, 1 rohové. Len pri takom rozmiestnení čísel v tabuľke platí

$$S = 4 \cdot 9 + 2 \cdot (8 + 7 + 6 + 5) + (4 + 3 + 2 + 1) = 98.$$

Keďže v každom štvorci 2×2 sú okrem čísla stredového dve čísla postranné a jedno číslo rohové, je v prípade $S = 98$ súčet týchto štyroch čísel aspoň $9 + 5 + 6 + 1$ čiže 21, a teda nemôže byť 20.

Poznámka:

Práve podané riešenie časti b) je možné skrátiť použitím jednoduchého výsledku z úvodnej časti nasledujúceho riešenia, že štvorec so súčtom čísel 29 musí byť vyplnený číslami 9, 8, 7, 5. V tejto situácii totiž dostávame

$$98 = 20 + 23 + 26 + 29 = S \leq 4 \cdot 9 + 2 \cdot (8 + 7 + 6 + 4) + (5 + 3 + 2 + 1) = 97,$$

čo je spor.

Riešenie 2:

Zápornú odpoveď pre časť b) dokážeme sporom odlišným spôsobom, pri ktorom sa zaobídeme bez poznatku z úvodného odseku k prvému riešeniu. Dva štvorce 2×2 tabuľky 3×3 nazveme „protiľahlými“, ak majú spoločné práve jedno políčko (uprostred tabuľky).

Nech vyplnenie tabuľky pre štvoricu súčtov $(20, 23, 26, 29)$ existuje. Keďže $9 + 8 + 7 + 6 = 30$, ležia vo štvorci 2×2 so súčtom 29 práve čísla 9, 8, 7, 5. Vyberme dva protiľahlé štvorce tak, aby jeden z nich (belasý) mal súčet čísel 29 a súčet v protiľahlom (ružovom) štvorci označíme T. Ďalej označme a a b, resp. c a d čísla v tých rohoch celej tabuľky a s číslo v strede tabuľky:

a		c
	s	
d		b

Potom zrejme platí

$$s = 29 + T + c + d - (1 + 2 + \cdots + 9) = 29 + T + c + d - 45 = T + c + d - 16.$$

Keby platilo $T \geq 23$, z poslednej rovnosti by sme mali $s \geq 7 + c + d$, čo je spor, pretože $s \leq 9$ a $c + d \geq 3$. Platí preto $T = 20$, takže zvyšné dva protiľahlé štvorce majú súčty 26 a 23. Z analogickej rovnosti

$$s = 26 + 23 + a + b - (1 + 2 + \ldots + 9) = 26 + 23 + a + b - 45 = a + b + 4$$

vzhľadom na vzťah $a \geq 5$ (lebo a je jedno z čísel 9, 8, 7, 5) vyplýva $s > 9$, čo je spor.

Pokyny:

2 body dajte za časť a), kde stačí uviesť príklad jednej vyplnenej tabuľky, a 4 body za časť b). V neúplných riešeniach časti b) oceňte čiastočné kroky nasledovne (uvažujeme len vyhovujúce tabuľky a štvorce 2×2 v nich):

- A1 Zdôvodnenie, prečo v tabuľke je číslo 9 stredové: 1 bod.
- A2 Zdôvodnenie, prečo v tabuľke sú čísla 5, 6, 7, 8 postrannými, resp. čísla 1, 2, 3, 4 rohovými: 1 bod.
- B1 Zdôvodnenie, prečo protiľahlými štvorcami sú tie so súčtami 29 a 20, resp. 23 a 26: 1 bod.
- B2 Vyjadrenie stredového čísla pomocou súčtov pre dva protiľahlé štvorce a dvoch čísel, ktoré do nich nepatria: 1 bod.
- C1 Zdôvodnenie, prečo štvorec so súčtom 29 je vyplnený číslami 9, 8, 7, 5: 1 bod.

Celkom potom za časť b) dajte súčet počtu bodov za C1 a maxima zo súčtu počtov bodov za A1 a A2 a súčtu počtov bodov za B1 a B2.

---

2 Určte všetky dvojice (k, n) kladných celých čísel takých, že existujú kladné celé čísla a, b také, že platí

$$\mathrm{D}(a + k, b) = n \cdot \mathrm{D}(a, b),$$

pričom $\mathrm{D}(x, y)$ označuje najväčší spoločný deliteľ kladných celých čísel x a y.

(Jaromír Šimša)

Riešenie 1:

Ukážeme, že úlohe vyhovujú všetky dvojice kladných celých čísel (k, n).

- Ak $n = 1$, nech $(a, b) = (k, k)$. Potom

  $$\mathrm{D}(a + k, b) = \mathrm{D}(2k, k) = k$$

  a

  $$\mathrm{D}(a, b) = \mathrm{D}(k, k) = k.$$

- Ak $n > 1$, tak pre ľubovoľné k platí $nk - k > 0$. Nech teda $(a, b) = (nk - k, nk)$. Potom platí

  $$\mathrm{D}(a + k, b) = \mathrm{D}(nk, nk) = nk$$

  a

  $$n \cdot \mathrm{D}(a, b) = n \cdot \mathrm{D}(k(n - 1), kn) = nk \cdot \mathrm{D}(n - 1, n) = nk,$$

  pričom sme v poslednej rovnosti využili fakt, že po sebe idúce prirodzené čísla $n - 1$ a n sú nesúdeliteľné.

Poznámka:

Uvedené riešenie je úplné, ale neposkytuje žiadny návod, ako sa k nemu dopracovať. Naznačíme jeden možný spôsob, ako príklady potrebných dvojíc čísel (a, b) hľadať.

Riešme úlohu najprv pre prípad $k = 1$ a ľubovoľné n, keď máme nájsť príklad dvojice (a, b) s vlastnosťou $\mathrm{D}(a + 1, b) = n \cdot \mathrm{D}(a, b)$. Z tejto rovnosti vyplýva, že $\mathrm{D}(a, b) \mid \mathrm{D}(a + 1, b)$, takže číslo $\mathrm{D}(a, b)$ musí byť nielen deliteľom čísel a a b, ale aj čísla $a + 1$. Čísla a a $a + 1$ sú však nesúdeliteľné, takže musí platiť $\mathrm{D}(a, b) = 1$. Z toho $\mathrm{D}(a + 1, b) = n \cdot \mathrm{D}(a, b) = n$, takže hľadáme príklad nesúdeliteľných čísel a a b takých, že $\mathrm{D}(a + 1, b) = n$. Nájsť taký príklad je ľahké: V prípade $n > 1$ vyhovuje dvojica $(n - 1, n)$, v prípade $n = 1$ dvojica $(1, 1)$.

Prechod od prípadu $k = 1$ k prípadu $k > 1$ založíme na nasledujúcom pozorovaní, platnom pre každé pevné n: Ak pre nejaké čísla a a b platí $\mathrm{D}(a + 1, b) = n \cdot \mathrm{D}(a, b)$, tak platí

$$\mathrm{D}(ka + k, kb) = k \cdot \mathrm{D}(a + 1, b) = k \cdot (n \cdot \mathrm{D}(a, b)) = n \cdot (k \cdot \mathrm{D}(a, b)) = n \cdot \mathrm{D}(ka, kb),$$

vyhovuje teda dvojica (ka, kb).

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné závery takto:

- A Existencia čísel a a b pre konečne veľa dvojíc (k, n) alebo hypotéza o ich existencii pre ľubovoľnú dvojicu (k, n): 0 bodov.
- B Existencia čísel a a b pre nekonečne veľa dvojíc (k, n) takých, že $n \neq 1$ (typicky pre dvojice $(1, n)$): 1 bod.
- C Existencia čísel a a b pre nekonečne veľa dvojíc (k, n), v ktorých k aj n nadobúdajú nekonečne veľa hodnôt (napríklad všetky prípady $k = n$): 2 body.
- D Existencia čísel a a b chýba iba pre konečný počet hodnôt k či konečný počet hodnôt n (typicky vynechanie či chybné riešenie prípadu $n = 1$): 5 bodov.
- E Zdôvodnenie, prečo stačí riešiť iba prípad $k = 1$ (pozri komentár za riešením): 2 body.

Celkom potom dajte maximum z počtov bodov za B, C, D a E.

---

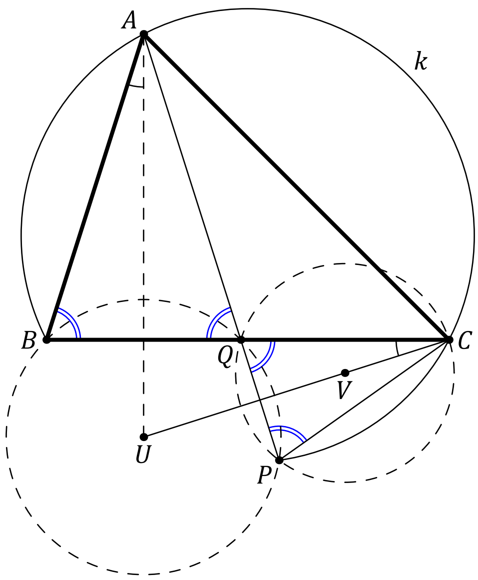
3 Nech k je kružnica opísaná danému ostrouhlému trojuholníku ABC. Nech P je vnútorný bod toho oblúka BC kružnice k, ktorý neobsahuje bod A. Označme Q priesečník úsečiek AP a BC a U a V stredy kružníc opísaných postupne trojuholníkom BPQ a CPQ. Dokážte, že ak priamka UV prechádza niektorým vrcholom trojuholníka ABC, tak jeden z bodov U a V leží na kružnici k.

(Michal Janík)

Riešenie 1:

Kružnice so stredmi U a V majú spoločnú tetivu PQ. Priamka UV je tak osou tejto úsečky a pretne ju v jej strede. Preto priamka UV nemôže prechádzať vrcholom A, keďže ten leží na priamke PQ, avšak nie vo vnútri úsečky PQ. Upresnime ešte, že vďaka ostrouhlosti trojuholníka ABC oba stredy U a V zrejme ležia vo vnútri polroviny BCP. (Uhly BPQ a CPQ sú totiž oba ostré, pretože sú zhodné postupne s uhlami BCA a CBA.)

Aby sme dokázali implikáciu zo zadania úlohy, predpokladajme najprv, že priamka UV prechádza vrcholom C:



V trojuholníku PQC potom os strany PQ prechádza vrcholom C, teda tento trojuholník je rovnoramenný s hlavným vrcholom C. Preto platí

$$|\sphericalangle BQA| = |\sphericalangle CQP| = |\sphericalangle CPQ| = |\sphericalangle CPA| = |\sphericalangle CBA|,$$

pričom v poslednom kroku sme využili zhodnosť obvodových uhlov nad oblúkom AC kružnice k. Trojuholník BQA je tak rovnoramenný s hlavným vrcholom A. Oba body A a U preto ležia na osi úsečky BQ, odkiaľ vyplýva

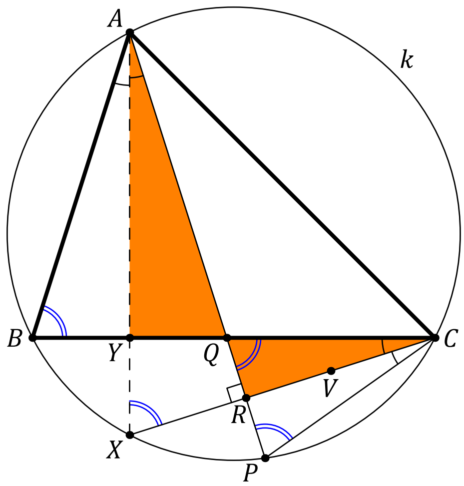
$$|\sphericalangle BAU| = 90^\circ - |\sphericalangle ABQ| = 90^\circ - |\sphericalangle CQP| = |\sphericalangle BCU|.$$

Úsečku BU teda vidno z bodov A a C pod rovnakým uhlom, a štvorica bodov B, U, C a A teda leží na jednej kružnici. Bod U preto leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC, čo je kružnica k.

V druhom prípade, keď priamka UV prechádza vrcholom B, z analogického postupu vyplýva, že na kružnici k leží bod V. (Môžeme však tiež navzájom vymeniť označenie vrcholov B a C.)

Riešenie 2:

Odlišným spôsobom posúdime vyššie rozoberaný prípad, keď priamka UV prechádza vrcholom C, takže je osou súmernosti rovnoramenného trojuholníka PQC. Nech X je priesečník polpriamky CV s kružnicou k. Stačí ukázať, že priamka AX je osou úsečky BQ, pretože vzhľadom na to, že priamka CX je osou úsečky PQ, už potom bude platiť $X = U$, a teda $U \in k$.



Keďže polpriamka CX je osou uhla PCQ čiže PCB, je bod X stredom toho oblúka BP kružnice k, ktorý neprechádza bodom C. Z toho vyplýva zhodnosť štyroch obvodových uhlov PCX, BCX, PAX a BAX. Označme ešte R stred úsečky PQ a Y priesečník úsečiek BQ a AX. Potom porovnaním vnútorných uhlov podfarbených trojuholníkov AQY a CQR zisťujeme, že uhol AYQ je rovnako ako uhol CRQ pravý. Os AX uhla BAQ je teda kolmá na úsečku BQ, a preto je priamka AX je osou tejto úsečky.

Poznámka:

Dodajme, že práve podaný výklad je možné obmeniť napríklad tak, že na odvodenie kolmosti AX a BQ využijeme štvoruholník $XRQY$ alebo $AYRC$, pri ktorých je možné zo zhodnosti vhodných uhlov ľahko nahliadnuť, že sú tetivové.

Pokyny:

1 bod dajte za konštatovanie (aj bez dôkazu), že na priamke UV nemôže ležať vrchol A, a 5 bodov za vyriešenie situácie, keď priamka UV prechádza vrcholom B alebo C. Ďalšie pokyny zapisujeme len pre prípad, keď priamka UV prechádza vrcholom C ako v oboch podaných riešeniach.

V neúplných riešeniach 5-bodovej časti oceňte čiastočné kroky nasledovne. Tolerujte pritom absenciu úvodnej zmienky o tom, že stredy U a V ležia vo vnútri polroviny BCP.

Za postup podobný prvému riešeniu dajte 1 bod za dôkaz rovnoramennosti trojuholníka PQC a 2 body za dôkaz rovnoramennosti trojuholníka BQA. Ak riešiteľ využíva tieto alebo iné z nich vyplývajúce poznatky bez dôkazov, dajte najviac 3 body z 5 možných bodov.

Za postup podobný druhému riešeniu dajte:

- 1 bod za zavedenie priesečníka X s vyjadreným úmyslom dokázať rovnosť $U = X$;
- 1 bod za dôkaz, že zavedený bod X je stredom oblúka BP;
- 2 body za dôkaz, že úsečky AX a BQ sú navzájom kolmé.

Pokiaľ riešiteľ využíva tieto alebo iné z nich vyplývajúce poznatky bez dôkazov, dajte najviac 3 body z 5 možných bodov.

---

4 Súčet 74 (nie nutne rôznych) reálnych čísel z uzavretého intervalu $[4, 10]$ je 356. Určte najväčšiu možnú hodnotu súčtu ich druhých mocnín.

(Zdeněk Pezlar)

Riešenie 1:

Označme čísla zo zadania x_1, ..., x_{74}. Pre každé i z predpokladu $x_i \in [4, 10]$ zrejme vyplýva $(x_i - 4)(10 - x_i) \geq 0$, čo po roznásobení dáva $x_i^2 \leq 14x_i - 40$. Sčítaním týchto nerovností pre všetky i z $\{1, \ldots, 74\}$ tak dostávame

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{74}^2 \leq 14(x_1 + x_2 + \cdots + x_{74}) - 40 \cdot 74 = 14 \cdot 356 - 40 \cdot 74 = 2024.$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď je každé číslo x_i rovné 4 alebo 10.

Skupina 74 čísel zložená z 64 čísel 4 a 10 čísel 10 má súčet 356 a súčet druhých mocnín 2024.

To znamená, že najväčšia možná hodnota súčtu druhých mocnín je 2024.

Riešenie 2:

Každú postupnosť A čísel x_1, ..., x_{74} z $[4, 10]$ so súčtom 356 nazveme *prípustnou skupinou* a označme S_A súčet $x_1^2 + \cdots + x_{74}^2$ a p_A počet takých indexov i, že x_i je 4 alebo 10. Záver, že najväčšia možná hodnota S_A existuje a je rovná 2024, vyplynie z nasledujúcich dvoch tvrdení.

1 Prípustná skupina M taká, že $p_M \geq 73$, je (až na poradie čísel) jediná. Pozostáva z 10 čísel 10 a 64 čísel 4 a $S_M = 2024$.

2 Pre každú prípustnú skupinu A takú, že $p_A \leq 72$ existuje prípustná skupina B taká, že $S_B > S_A$ a $p_A > p_B$.

Podľa 1) totiž stačí dokázať nerovnosť $S_A < 2024$ pre ľubovoľnú prípustnú skupinu A takú, že $p_A \leq 72$. Ak na ňu uplatníme opakovane záver 2), celkom najviac $(73 - p)$-krát, dostaneme sa od východiskovej skupiny A k prípustnej skupine M.

Dôkaz 1: Nebudeme opakovať dôkaz toho, čo sme zistili v predchádzajúcom riešení: Prípustná skupina M taká, že $p_M = 74$, je jediná, je zložená z 10 čísel 10 a 64 čísel 4 a $S_M = 2024$. Tvrdenie 1) tak platí, pokiaľ neexistuje žiadna prípustná skupina A taká, že $p_A = 73$. Posledné dokážeme sporom.

Nech teda existuje prípustná skupina A taká, že $p_A = 73$. Taká skupina je teda zložená z d čísel 10, $73 - d$ čísel 4 a jedného čísla x, kde $4 < x < 10$. Z rovnosti

$$10d + (73 - d) \cdot 4 + x = 356$$

vyplýva $x = 64 - 6d$. Platí teda $4 < 64 - 6d < 10$, čiže $54 < 6d < 60$, a teda $9 < d < 10$, čo je spor.

Dôkaz 2: Nech prípustná skupina A čísel $x_1, \ldots, x_{74}$ je taká, že $p_A \leq 72$. Aspoň dva členy tejto skupiny sa teda nerovnajú ani 4 ani 10. Vyberme preto dva jej členy x_i a x_j také, že $4 < x_i \leq x_j < 10$ a $i \neq j$. Nech

$$c = \min(x_i - 4, 10 - x_j),$$

takže $c > 0$. V uvažovanej prípustnej skupine A nahraďme člen x_i menším číslom $x_i - c$ a člen x_j väčším číslom $x_j + c$, čím dostaneme skupinu B. Touto zmenou zostane určite zachovaný súčet 356 všetkých 74 čísel. Navyše vďaka výberu c nastáva v platných nerovnostiach $c \leq x_i - 4$ a $c \leq 10 - x_j$ aspoň jedna rovnosť, teda oba nové členy $x_i - c$ a $x_j + c$ ležia v intervale $[4, 10]$ a aspoň jeden z nich je rovný 4 alebo 10. Nová skupina B čísel je teda prípustná a platí $p_B > p_A$. Keďže

$$\left((x_i - c)^2 + (x_j + c)^2\right) - \left(x_i^2 + x_j^2\right) = x_i^2 - 2cx_i + c^2 + x_j^2 + 2cx_2 + c^2 - x_j^2 - x_j^2 = 2c(x_j - x_i) + 2c^2 > 0,$$

platí aj $S_B > S_A$.

Poznámka:

Keďže všetkých prípustných skupín 74 čísel je nekonečne veľa, nie je existencia najväčšej možnej hodnoty S_A samozrejmá, ani keď ukážeme, že množina všetkých hodnôt S_A je zhora ohraničená. Bez dôkazu tejto existencie nemožno podané riešenie viesť zjednodušeným spôsobom, pri ktorom sa zaoberáme iba otázkou, ako musí vyzerať každá prípustná skupina A taká, že S_A je najväčšie možné.

Poznámka:

Predložené riešenie môžeme ešte upraviť nasledujúcim spôsobom: Pre každé i z $\{1, \ldots, 74\}$ nech $y_i = x_i - 7$. Z predpokladu $x_i \in [4, 10]$ plynie $y_i \in [-3, 3]$. Sčítaním všetkých týchto 74 rovností vzhľadom na podmienku zo zadania dostaneme, že

$$\sum_{i=1}^{74} y_i = 356 - 74 \cdot 7 = -162.$$

Potom

$$\sum_{i=1}^{74} x_i^2 = \sum_{i=1}^{74} (y_i + 7)^2 = \sum_{i=1}^{74} y_i^2 + 14 \sum_{i=1}^{74} y_i + 74 \cdot 7^2 = \sum_{i=1}^{74} y_i^2 - 14 \cdot 162 + 74 \cdot 49 = \sum_{i=1}^{74} y_i^2 + 1358.$$

Vzhľadom na zrejmý odhad $y_i^2 \leq 9$ odtiaľ opäť plynie

$$\sum_{i=1}^{74} x_i^2 \leq 74 \cdot 9 + 1358 = 2024,$$

kde rovnosť nastane práve vtedy, keď pre každé i z $\{1, \ldots, 74\}$ platí $y_i \in \{-3, 3\}$. (Tento, teraz zrejmý, odhad znamená, že $9 \geq (x_i - 7)^2 = x_i^2 - 14x_i + 49$, čo je po úprave nerovnosť $x_i^2 \leq 14x_i - 40$ odvodená v riešení.)

Keďže $-162 = 54 \cdot (-3)$, skupina $(y_1, \ldots, y_{74})$ spĺňajúca podmienku $y_1 + y_2 + \cdots + y_{74} = -162$ obsahuje práve 64 čísel -3 a 10 čísel 3. Zodpovedajúca skupina čísel $(x_1, \ldots, x_{74})$ teda obsahuje 64 čísel 4 a 10 čísel 10.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastkové kroky takto:

- A Správna odpoveď bez zdôvodnenia: 0 bodov.
- B1 Dôkaz nerovnosti $x_1^2 + \cdots + x_{74}^2 \leq 2024$: 5 bodov.
- B2 Uvedenie vyhovujúceho príkladu, keď $x_1^2 + \cdots + x_{74}^2 = 2024$ (stačí aj uhádnutie): 1 bod.
- C1 Dôkaz tvrdenia 1): 2 body, po 1 bode za prípady $p = 73$ a $p = 74$.
- C2 Dôkaz tvrdenia 2): 3 body.
- C3 Zdôvodnenie, prečo pre každú prípustnú skupinu s hodnotou p menšou než 73 sa nájde prípustná skupina s väčším súčtom S a hodnotou p aspoň 73: 4 body.

Celkom potom dajte maximum zo súčtu počtov bodov za B1 a B2 a súčtu počtu bodov za C1 a maxima z počtu bodov C2 a C3.

Za riešenie, ktoré využíva nedokázanú existenciu najväčšieho možného súčtu, dajte najviac 4 body.