2004/2005
54. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh výberového sústredenia*

(*Sústredenie sa konalo 24. – 30. 4. 2005.*)

1. Daná je priamka p a kružnica k, ktorá s ňou nemá spoločný bod. Nech AB je jej priemer kolmý na p, pričom B je bližšie k p ako A. Vyberieme ľubovoľný bod $C \neq A, B$ na k. Priamka AC pretína priamku p v bode D. Priamka DE je dotyčnicou k v bode E, pričom B a E sú na tej istej strane AC. Priamka BE pretína p v bode F a priamka AF pretína k v $G \neq A$. Nech H je obraz bodu G v súmernosti podľa priamky AB. Dokážte, že H leží na priamke CF.

2. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, pre ktoré platí $ab + bc + ca = 1$. Dokážte nerovnosť

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leqq \frac{1}{abc}.$$

Kedy nastáva rovnosť?

3. Nech A je matica typu $n \times n$ a nech X_i je množina koeficientov v i-tom riadku a Y_j je množina koeficientov v j-tom stĺpci (pre všetky $1 \leqq i, j \leqq n$). Maticu A nazveme *zlatá*, ak $X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sú rôzne množiny. Nájdite najmenšie n také, že existuje zlatá matica typu 2005×2005 s množinou koeficientov $\{1, 2, \ldots, n\}$.

4. Reálne čísla x, y, z spĺňajú vzťahy

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 6. \end{aligned}$$

Aké hodnoty môže nadobúdať x?

5. Daná je tabuľka 25×100. Allan a Bob hrajú takúto hru: Hráč, ktorý je na ťahu, nakreslí trojuholník s vrcholmi v stredoch políčok tabuľky. Žiadne dva nakreslené trojuholníky nesmú mať spoločný bod. V ťahoch sa hráči pravidelne striedajú. Prehráva ten, čo je na ťahu, ale už nemôže nakresliť žiaden ďalší trojuholník. Allan začína. Má niektorý z hráčov víťaznú stratégiu?

6. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Nech P, N sú päty jeho výšok z vrcholov A, B. Nech K, L sú priesečníky osí uhlov BAC, ABC s protiľahlými stranami. Nech O je stred opísanej kružnice a I stred vpísanej kružnice trojuholníka ABC. Dokážte, že body N, P, I sú kolineárne práve vtedy, keď body L, K, O sú kolineárne.

7. Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že $n \mid 3^n - 2^n$.

8. Nech P je konvexný mnohouholník. Dokážte, že existuje konvexný šesťuholník, ktorý je vpísaný do P a obsahuje aspoň 75% jeho obsahu.

9. Majme tri postupnosti $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $(z_2, z_3, \ldots, z_{2n})$ kladných reálnych čísel, pričom platí

$$z_{i+j} \geqq x_i y_j, \quad \text{pre všetky } 1 \leqq i, j \leqq n.$$

Označme $M = \max\{z_2, z_3, \ldots, z_{2n}\}$. Dokážte nerovnosť

$$\left(\frac{M + z_2 + z_3 + \cdots + z_{2n}}{2n}\right)^2 \geqq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}.$$

10. Nech $f(k)$ označuje počet prirodzených čísel n s vlastnosťami

i) $0 \leqq n < 10^k$, t. j. číslo n má v desiatkovom zápise práve k číslic (nuly na začiatku sú povolené);

ii) číslice čísla n môžu byť poprehadzované tak, že výsledné číslo bude deliteľné číslom 11 bezo zvyšku.

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo m platí $f(2m) = 10f(2m-1)$.

11. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktoré spĺňajú rovnosť

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$$

pre každú dvojicu reálnych čísel x, y.

12. Pre dané prirodzené číslo $n > 1$ označme s_n súčin všetkých takých kladných celých čísel x menších ako n, že n je deliteľom čísla $x^2 - 1$. (Máme teda $s_2 = 1$, $s_3 = 1 \cdot 2$, $s_4 = 1 \cdot 3$, $\ldots$) Pre každé $n > 1$ určte zvyšok s_n po delení číslom n.

13. Daný je trojuholník ABC. Označme postupne P, Q, R päty kolmíc spustených z vrcholov A, B, C na osi vonkajších uhlov trojuholníka pri vrcholoch C, A, B. Označme d priemer kružnice opísanej trojuholníku PQR. Dokážte, že $d^2 = \varrho^2 + s^2$, pričom ϱ je polomer kružnice vpísanej do trojuholníka ABC a s je polovica obvodu trojuholníka ABC.

14. Označme $p(k)$ najväčší nepárny deliteľ prirodzeného čísla $k \geqq 1$. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$\frac{2}{3}n < \sum_{k=1}^{n} \frac{p(k)}{k} < \frac{2}{3}(n+1).$$

15. Políčka šachovnice $n \times n$, kde $n \geqq 3$, sú zafarbené na čierno a bielo klasickým spôsobom. V jednom ťahu môžeme vybrať štvorec 2×2 a zmeniť farbu všetkých jeho políčok na opačnú. Nájdite všetky n také, že po konečnom počte popísaných ťahov vieme zafarbiť šachovnicu tak, že všetky políčka majú rovnakú farbu.

16. Nech O je stred kružnice opísanej ostrouhlému trojuholníku ABC, v ktorom platí $\beta < \gamma$. Priamka AO pretína stranu BC v bode D. Stredy kružníc opísaných trojuholníkom ABD a ACD označme postupne E a F. Bod G leží na priamke AB tak, že bod A je vnútorným bodom úsečky BG a platí $|AG| = |AC|$. Bod H leží na priamke AC tak, že bod A je vnútorným bodom úsečky CH a platí $|AH| = |AB|$. Dokážte, že štvoruholník $EFGH$ je obdĺžnik práve vtedy, keď $\gamma - \beta = 60°$.

17. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ spĺňajúce $f(1) > 0$ a rovnosť $f(m^2 + n^2) = f(m)^2 + f(n)^2$ pre všetky m, n z $\mathbb{N}_0$.