MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Riešenia úloh domáceho kola kategórie B

1 Koľko neprázdnych podmnožín množiny $\{0, 1, \dots, 9\}$ má súčet prvkov deliteľný 3?

(Eliška Macáková)

Riešenie 1:

Vyjdeme z toho, že pri delení ľubovoľným kladný prirodzeným číslom je zvyšok súčtu niekoľkých celých čísel rovnaký ako zvyšok čísla, ktoré dostaneme sčítaním zvyškov jednotlivých sčítancov.

Preto 10 zadaných čísel rozdelíme podľa ich zvyškov po delení 3 do troch množín

$$A_0 = \{0, 3, 6, 9\},$$
$$A_1 = \{1, 4, 7\},$$
$$A_2 = \{2, 5, 8\}.$$

Sčítance z A_0 nijako neovplyvňujú zvyšky skúmaných súčtov. Každý z týchto výsledných zvyškov je jednoznačne určený dvoma počtami, a to počtom sčítancov z A_1, ktorý označíme x, a počtom sčítancov z A_2, ktorý označíme y. Zrejme $x, y \in \{0, 1, 2, 3\}$, teda prebratím všetkých možných dvojíc (x, y) môžeme otestovať, pre ktoré z nich je súčet x čísel z A_1 a y čísel z A_2 deliteľný 3.

V dvoch skupinách teraz popíšeme (už bez vysvetlenia) všetky typy vyhovujúcich výberov čísel z oboch množín A_1, A_2 a uvedieme ich počty.

- V prípade, že z A_1 nevyberieme žiadne číslo, z A_2 musíme vybrať 0 alebo 3 čísla. Rovnaký záver o výbere z A_2 platí aj v prípade, keď z A_1 vyberieme 3 čísla. V oboch prípadoch dokopy tak máme pre výber čísel z $A_1 \cup A_2$ štyri možnosti a to $\emptyset$, $\{2, 5, 8\}$, $\{1, 4, 7\}$, $\{1, 4, 7, 2, 5, 8\}$.
- Zostávajú prípady, keď z A_1 vyberieme 1 alebo 2 čísla. Potom rovnaký počet čísel musíme vybrať aj z A_2. Keďže každá trojprvková množina má 3 jednoprvkové a 3 dvojprvkové podmnožiny, máme dokopy ďalších $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3$ čiže 18 možností výberu čísel z $A_1 \cup A_2$ (nebudeme ich tu, samozrejme, vypisovať).

Existuje teda celkom $4+18$ čiže 22 vyhovujúcich výberov čísel z $A_1 \cup A_2$. Každý z nich je možné doplniť o niektoré čísla zo 4-prvkovej množiny A_0 práve 2^4 čiže 16 spôsobmi. Počet všetkých vyhovujúcich výberov z $A_0 \cup A_1 \cup A_2$ je teda $22 \cdot 16$ čiže 352, kde je avšak započítaná aj prázdna množina. Preto je hľadaný počet 351.

Poznámka:

Rýchlejší postup je možné založiť na tom, že súčet zo zadania je deliteľný 3 práve vtedy, keď je deliteľný 3 súčet $x + 2y$, ktorý je možné výhodne zameniť číslom o $3y$ menším, teda $x - y$. Pre čísla x a y z $\{0, 1, 2, 3\}$ to znamená, že buď $x = y$, alebo $|x - y| = 3$.

Riešenie 2:

Budeme riešiť všeobecnejšiu úlohu, a to pre každé prirodzené číslo k nájsť počet $p(k)$ tých podmnožín množiny $\{0, 1, \dots, 3k\}$, ktoré majú súčet prvkov deliteľný 3. (Za súčet prvkov prázdnej množiny považujeme 0.) Odpoveď na otázku z pôvodnej úlohy potom bude $p(3) - 1$.

V prípade $k = 0$ je daná množina $\{0\}$, takže zrejme platí $p(0) = 2$ (vyhovujú obe podmnožiny $\emptyset$ a $\{0\}$).

Ďalej odvodíme vzorec, podľa ktorého je možné hodnotu $p(k + 1)$ vypočítať z hodnôt k a $p(k)$, a to pre každé prirodzené číslo k. (V takejto situácii hovoríme, že postupnosť p je určená *rekurentne*.) Každú podmnožinu množiny $\{0, 1, \dots, 3k+3\}$ môžeme zostrojiť tak, že najskôr vyberieme podmnožinu množiny $\{0, 1, \dots, 3k\}$ a tú potom zjednotíme s podmnožinou množiny $\{3k+1, 3k+2, 3k+3\}$. Posúďme všetky možnosti, kedy takto vznikne množina so súčtom prvkov, ktorý je deliteľný 3.

- Ak vyberieme podmnožinu M množiny $\{0, 1, \dots, 3k\}$ so súčtom prvkov deliteľným 3, musíme ju potom zjednotiť s jednou zo štyroch množín $\emptyset$, $\{3k + 3\}$, $\{3k + 1, 3k + 2\}$ a $\{3k + 1, 3k + 2, 3k + 3\}$. Keďže takýchto podmnožín M je práve $p(k)$, dostaneme z nich prvých $4p(k)$ podmnožín, ktoré patria do hľadaného počtu $p(k + 1)$.
- Podmnožín množiny $\{0, 1, \dots, 3k\}$, ktoré sme v predchádzajúcom prípade neuvažovali, je práve $2^{3k+1} - p(k)$. Ľubovoľná z nich má súčet prvkov, ktorý pri delení tromi dáva buď zvyšok 1, alebo zvyšok 2. V prípade zvyšku 1 potom musíme takúto podmnožinu zjednotiť z jednou z dvoch množín $\{3k+2\}$ a $\{3k+2, 3k+3\}$, v prípade zvyšku 2 s jednou z dvoch množín $\{3k + 1\}$ a $\{3k + 1, 3k + 3\}$. Bez ohľadu na to, koľko je prvých prípadov

a koľko je tých druhých, je jasné, že dokopy dostaneme ďalších $2\left(2^{3k+1}-p(k)\right)$ podmnožín, ktoré patria do hľadaného počtu $p(k+1)$.

(Počty oboch prípadov sú v skutočnosti rovnaké. Všetky podmnožiny M_1 so „súčtovým" zvyškom 1 možno totiž spárovať so všetkými podmnožinami M_2 so „súčtovým" zvyškom 2 tak, že v ľubovoľnom páre (M_1, M_2) jednu z množín dostaneme z druhej množiny, ak v nej každé zastúpené číslo c zameníme číslom $3k-c$.)

Zhrnutím oboch čiastkových výsledkov dostávame

$$p(k+1) = 4p(k) + 2\left(2^{3k+1} - p(k)\right) = 2\left(2^{3k+1} + p(k)\right).$$

Keďže $p(0) = 2$, postupne určíme $p(1) = 8$, $p(2) = 48$, $p(3) = 352$. (Ďalšie členy postupnosti p už na riešenie pôvodnej úlohy nepotrebujeme.)

Poznámka:

Použitím princípu matematickej indukcie možno ľahko overiť, že pre každé prirodzené číslo k platí

$$p(k) = \frac{\left(2^{2k}+2\right)\cdot 2^{k+1}}{3}.$$

Riešenie 3:

Znovu sa budeme venovať zovšeobecneniu súťažnej úlohy, a to nájsť pre každé prirodzené číslo k počet $p(k)$ tých podmnožín množiny $\{0, 1, \dots, 3k\}$, ktoré majú súčet prvkov deliteľný 3.

Úvodná časť bude rovnaká ako v prvom riešení. Zadaných $3k+1$ čísel rozdelíme podľa ich zvyškov po delení 3 do troch množín

$$A_0 = \{0, 3, \dots, 3k\},$$
$$A_1 = \{1, 4, \dots, 3k-2\},$$
$$A_2 = \{2, 5, \dots, 3k-1\}$$

a každú vyhovujúcu podmnožinu budeme konštruovať v tvare $M \cup P$, kde $M \subseteq A_0$ a $P \subseteq A_1 \cup A_2$. Keďže čísla z M sú deliteľné 3, môžeme za M vybrať ktorúkoľvek z 2^{k+1} podmnožín $(k+1)$-prvkovej množiny A_0. Preto budeme hľadať hodnotu $p(k)$ v tvare

$$p(k) = 2^{k+1} \cdot q(k),$$

kde $q(k)$ je počet tých podmnožín množiny $A_1 \cup A_2$, ktoré majú súčet prvkov deliteľný 3.

Hodnota $p(k)$ je úplne určená tým, že množina A_1 je zložená z k rôznych čísel so zvyškom 1 a množina A_2 z k rôznych čísel so zvyškom 2. Vezmeme preto iné dve množiny týchto vlastností, a to

$$B_1 = \{2^0, 2^2, \dots, 2^{2k-2}\},$$
$$B_2 = \{2^1, 2^3, \dots, 2^{2k-1}\}.$$

(Využili sme to, že 1 je zvyšok čísla 2^{2j} a 2 je zvyšok čísla 2^{2j+1} pre každé prirodzené číslo j.) Hodnota $q(k)$ potom bude počet tých podmnožín v $B_1 \cup B_2$, ktoré majú súčet prvkov deliteľný 3. Súčet prvkov *akejkoľvek* podmnožiny množiny $B_1 \cup B_2$ je číslo z množiny $\{0, 1, 2, \dots, 2^{2k}-1\}$, pretože $2^{2k}-1$ je súčet *všetkých* čísel z množiny $B_1 \cup B_2$. (Číslo $2^{2k}-1$ je totiž v dvojkovej sústave zapísané $2k$ jednotkami.)

Naopak, z jednoznačnosti zápisu čísel v dvojkovej sústave vyplýva, že pre každé s z množiny $\{0, 1, 2, \dots, 2^{2k}-1\}$ existuje práve jedna podmnožina množiny $B_1 \cup B_2$ so súčtom prvkov rovným číslu s. Vďaka tejto bijekcii medzi množinou $\{0, 1, 2, \dots, 2^{2k}-1\}$ a množinou všetkých podmnožín množiny $B_1 \cup B_2$ dochádzame k záveru, že hľadaný počet $q(k)$ je rovný počtu tých čísel z $\{0, 1, 2, \dots, 2^{2k}-1\}$, ktoré sú deliteľné 3. Keďže najmenšie číslo 0 aj najväčšie číslo $2^{2k}-1$ z tejto množiny sú deliteľné 3, platí

$$q(k) = 1 + \frac{2^{2k}-1}{3} = \frac{2^{2k}+2}{3}.$$

Z toho už získavame výsledný vzorec

$$p(k) = 2^{k+1} \cdot \frac{2^{2k}+2}{3} = \frac{\left(2^{2k}+2\right)\cdot 2^{k+1}}{3}.$$

Poznámka:

Podobne ako v predchádzajúcich dvoch riešeniach je možné tiež dokázať nasledujúce tvrdenia.

Pre každé prirodzené $n0$ označme $P(n)$ počet tých podmnožín množiny $\{0, 1, \dots, n\}$, ktoré majú súčet prvkov deliteľný 3. Potom $P(0) = P(1) = 2$, $P(2) = 4$ a pre každé prirodzené k platí

$$P(3k+4) = 2 \cdot \left(2^{3k+2} + P(3k+1)\right)$$

a

$$P(3k+5) = 2 \cdot \left(2^{3k+3} + P(3k+2)\right).$$

Explicitne

$$P(3k+1) = \frac{\left(2^{2k+1}+1\right) \cdot 2^{k+1}}{3}$$

a

$$P(3k+2) = \frac{\left(2^{2k+1}+1\right) \cdot 2^{k+2}}{3}.$$

(Hodnoty $P(3k)$ sme predtým mali pod označením $p(k)$.)

---

2 Určte všetky možné hodnoty výrazu

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3},$$

ak a, b, c sú reálne čísla také, že platí

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b}.$$

(Michal Rolínek)

Riešenie:

Zo zadania vyplýva, že čísla a, b, c spĺňajú podmienky $b+c \neq 0$, $c+a \neq 0$, $a+b \neq 0$. Za týchto predpokladov ekvivalentne upravíme prvú zo zadaných rovností:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a},$$
$$a(c+a) = b(b+c),$$
$$ac + a^2 = b^2 + bc,$$
$$(a-b)(a+b) + c(a-b) = 0,$$
$$(a-b)(a+b+c) = 0.$$

Analogickými úpravami druhej rovnosti a tiež rovnosti tretieho zlomku s prvým zlomkom dostaneme

$$(b-c)(a+b+c) = 0$$

a

$$(c-a)(a+b+c) = 0.$$

Za spomínaných predpokladov reálne čísla a, b, c spĺňajú zadanie práve vtedy, keď platí $a+b+c = 0$ alebo $a = b = c$.

- V prípade, keď $a+b+c = 0$, máme

  $$\frac{a^3+b^3+c^3}{(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3} = \frac{a^3+b^3+c^3}{(-a)^3+(-b)^3+(-c)^3} = -1,$$

  ak platí $a^3+b^3+c^3 \neq 0$, inak výraz nemá zmysel.
- V prípade, keď $a = b = c$, máme

  $$\frac{a^3+b^3+c^3}{(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3} = \frac{a^3+a^3+a^3}{(2a)^3+(2a)^3+(2a)^3} = \frac{1}{8},$$

  tentoraz za podmienky, že $a \neq 0$.

Zostáva ukázať, že obe nájdené hodnoty sú dosiahnuteľné:

- Rovnosť $a+b+c = 0$ je splnená napríklad v prípade $(a, b, c) = (1, 1, -2)$. Vtedy platí podmienka zo zadania a výraz zo zadania má naozaj hodnotu -1.

- Rovnosť $a = b = c$ je splnená napríklad v prípade $(a, b, c) = (1, 1, 1)$, Vtedy platí podmienka zo zadania a výraz zo zadania má naozaj hodnotu $1/8$.

Zadaný výraz má jediné dve možné hodnoty, a to -1 a $1/8$.

Riešenie 2:

Označme k spoločnú hodnotu zadaných troch zlomkov. Potom zrejme platia rovnosti

$$a = k(b + c),$$
$$b = k(c + a),$$
$$c = k(a + b).$$

Pokiaľ má zadaný výraz zmysel, vďaka týmto rovnostiam platí

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{(b + c)^3 + (c + a)^3 + (a + b)^3} = \frac{k^3(b + c)^3 + k^3(c + a)^3 + k^3(a + b)^3}{(b + c)^3 + (c + a)^3 + (a + b)^3} = k^3.$$

Možné hodnoty k určíme z tývhto zrovností ich sčítaním:

$$(a + b + c) = 2k(a + b + c),$$

odkiaľ

$$(a + b + c)(1 - 2k) = 0.$$

Platí teda $a + b + c = 0$ alebo $1 - 2k = 0$. Prvá rovnosť znamená $k = -1$, druhá $k = 1/2$. Že sú obe tieto hodnoty k dosiahnuteľné, ukazujú rovnaké príklady trojíc (a, b, c) ako v prvom riešení. Keďže pre ne má zadaný výraz zmysel, jediné jeho možné hodnoty sú $(-1)^3$ čiže -1 a $(1/2)^3$ čiže $1/8$.

Poznámka:

Ukážme, že na určenie možných hodnôt k môžeme so sústavou rovností (1) narábať aj inak. Odčítaním druhej rovnosti od prvej dostaneme $a - b = k(b - a)$, čiže $(a - b)(k + 1) = 0$. Analogicky získame $(b - c)(k + 1) = 0$. Platí teda $k = -1$ alebo $a - b = b - c = 0$. Posledné však znamená $a = b = c$, čomu zodpovedá $k = 1/2$.

Riešenie 3:

Upravíme zadané rovnosti troch zlomkov, a to tak, že ku každému z ich pripočítame 1. Dostaneme

$$\frac{a + b + c}{b + c} = \frac{a + b + c}{c + a} = \frac{a + b + c}{a + b}.$$

Platí teda $a + b + c = 0$ alebo

$$\frac{1}{b + c} = \frac{1}{c + a} = \frac{1}{a + b}, \quad \text{odkiaľ} \quad b + c = c + a = a + b.$$

Z posledných dvoch rovností však vyplýva $a = b = c$. Ďalej už môžeme pokračovať ako v prvom riešení.

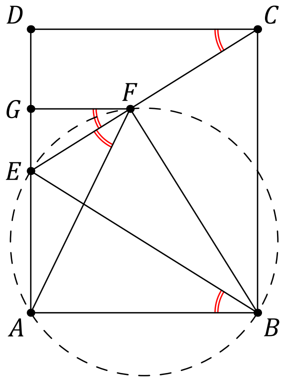
---

3 Nech E je stred strany AD obdĺžnika $ABCD$. Nech päta F kolmice z vrcholu B na priamku CE leží vnútri úsečky CE. Nech G je päta kolmice z bodu F na stranu AD. Dokážte, že priamka CE rozpoľuje uhol AFG.

(Jaroslav Švrček)

Riešenie 1:

Uvedieme tri pozorovania, z ktorých vyplynie zhodnosť štyroch uhlov vyznačených na obrázku dvoma oblúčikmi. Vďaka dvom z nich – uhlom AFE a GFE – priamka CE naozaj rozpoľuje uhol AFG.



- Keďže oba uhly BAE a BFE sú pravé (a ich vrcholy A, resp. F ležia v opačných polrovinách s hraničnou priamkou BE), podľa Tálesovej vety je štvoruholník $ABFE$ tetivový. V kružnici jemu opísanej tak (podľa vety o obvodových uhloch) platí $|\sphericalangle AFE| = |\sphericalangle ABE|$.
- Trojuholníky ABE a DCE sú zhodné podľa vety *sus*, pretože $|AB| = |DC|$, $|AE| = |DE|$ a oba uhly BAE a CDE sú pravé. Preto platí $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle DCE|$.
- Úsečky CD a FG sú kolmé na stranu AD, a teda navzájom rovnobežné. Podľa vety o súhlasných uhloch tak platí $|\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle GFE|$.

Dokopy už dostávame

$$|\sphericalangle AFE| = |\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle GFE|,$$

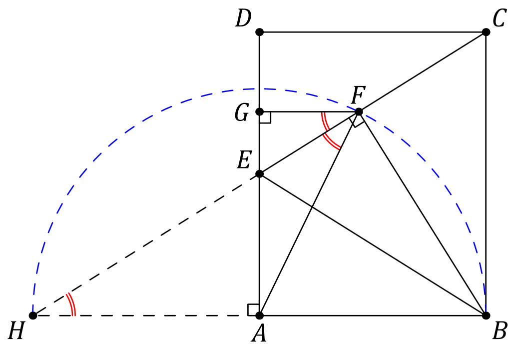
ako sme chceli dokázať.

Poznámka:

Namiesto použitia vety *sus* stačí konštatovať súmernosť pravouholníka $ABCD$ podľa spoločnej osi protiľahlých strán BC a AD, ktorá prechádza bodom E.

Riešenie 2:

Tentoraz potrebnú zhodnosť uhlov AFE a GFE dokážeme pomocou bodu H, ktorý zavedieme ako priesečník priamok CE a AB:



Trojuholníky AEH a DEC sú zhodné podľa vety *usu*, lebo $|AE| = |DE|$, pri vrcholoch A, D majú pravé uhly a pri vrchole E zhodné vrcholové uhly. Vďaka tomu platí $|AH| = |DC|$, teda aj $|AH| = |AB|$. Bod A je tak stredom úsečky HB, ktorá je preponou pravouhlého trojuholníka HBF. Stred kružnice jemu opísanej je podľa Tálesovej vety teda práve bod A. Platí preto $|AF| = |AH|$, teda v trojuholníku AFH sú zhodné vnútorné uhly AHF a AFH, čo je uhol AFE. K jeho zhodnosti s uhlom GFE tak už len zostáva dokázať zhodnosť uhlov AHF a GFE. To sú však striedavé uhly medzi dvoma kolmicami AH a FG na stranu AD, teda medzi dvoma rovnobežkami.

Poznámka:

Rovnosť $|AH| = |AB|$ vyplýva aj z toho, že AE je stredná priečka trojuholníka BCH. Je totiž rovnobežná so stranou BC a má oproti nej polovičnú dĺžku.

---

4 Rozhodnite, či existuje pätica kladných celých čísel

a) (a, a, a, a, b), kde a, b sú rôzne čísla,

b) (a, a, b, b, c), kde a, b, c sú rôzne čísla,

v ktorých je každé z týchto čísel deliteľom súčtu každých troch zo zvyšných štyroch čísel.

(Jaroslav Zhouf)

Riešenie:

a) Najskôr určíme, ktoré deliteľnosti majú platiť.

V zadanej pätici (a, a, a, a, b) sú dve rôzne čísla a a b. Číslo a má deliť jednak $a + a + a$, čo platí pre každé a, jednak $a + a + b$, čo zrejme nastane práve vtedy, keď $a \mid b$.

Číslo b má deliť $a + a + a$ čiže $3a$.

Máme teda rozhodnúť, či môže zároveň platiť $a \mid b$ a $b \mid 3a$. Odpoveď je áno, ako potvrdzuje prípad $a = 1$ a $b = 3$, kedy zadaná pätica je $(1, 1, 1, 1, 3)$.

b) Číslo a má okrem iného deliť $a + b + c$ aj $b + b + c$, takže aj ich rozdiel $a - b$, a teda aj b.

Analogicky, číslo b má okrem iného deliť $a + a + c$ aj $a + b + c$, takže aj ich rozdiel $a - b$, a teda aj a.

Keďže má súčasne platiť $a \mid b$ a $b \mid a$, platí že $a = b$, čo je spor.

Žiadna vyhovujúca pätica (a, a, b, b, c) neexistuje.

Poznámka:

Ukážeme, že v časti a) sú všetky vyhovujúce pätice tvaru $(a, a, a, a, 3a)$. Naozaj, prvá podmienka $a \mid b$ znamená, že $b = ka$ pre vhodné prirodzené číslo k. Zvyšnú druhú podmienku $b \mid 3a$ potom môžeme prepísať ako $ka \mid 3a$ alebo $k \mid 3$, a tak $k = 1$ alebo $k = 3$. Podľa zadania však platí $a \neq b$, teda $a \neq ka$, odkiaľ $k \neq 1$. Jediné vyhovujúce k je tak 3.

Poznámka:

V časti a) môžeme nejaký vyhovujúci príklad rovno vypísať (ako keby sme ho uhádli) a potom vykonať skúšku. Alebo sa na úvod rozhodneme výhodne zvoliť $a = 1$ (číslo 1 je totiž samozrejmý deliteľ) a potom si všimneme, že stačí, aby zodpovedajúca pätica $(1, 1, 1, 1, b)$ spĺňala jedinú podmienku $b \mid 1 + 1 + 1$.

---

5 Nech pomer polomeru kružnice vpísanej do pravouhlého trojuholníka a polomeru kružnice jemu opísanej je $2 : 5$. Dokážte, že dĺžka jednej z jeho strán je aritmetickým priemerom dĺžok zvyšných dvoch strán.

(Mária Dományová)

Riešenie 1:

Označme a a b dĺžky odvesien a c dĺžku prepony uvažovaného pravouhlého trojuholníka. Polomer R kružnice jemu opísanej je daný vzorcom $R = \frac{1}{2}c$ vďaka Tálesovej vete, zatiaľ čo pre polomer r kružnice vpísanej je známy vzorec $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$.

Zo zadaného vzťahu $r : R = 2 : 5$ po dosadení uvedených vzorcov dostaneme

$$\frac{a + b - c}{c} = \frac{2}{5},$$

po úprave

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 1 = \frac{2}{5},$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{7}{5}.$$

Podľa Pytagoovej vety

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

takže

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1,$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Nech $x = \frac{a}{c}$ a $y = \frac{b}{c}$, dostávame tak sústavu rovníc

$$x + y = \frac{7}{5},$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

s neznámymi x a y. Tú vyriešime bežnou metódou: Z prvej rovnice

$$y = \frac{7}{5} - x,$$

takže z druhej

$$x^2 + \left(\frac{7}{5} - x\right)^2 = 1,$$

z čoho

$$x^2 + \frac{49}{25} - \frac{14}{5}x + x^2 = 1,$$

$$2x^2 - \frac{14}{5}x + \frac{24}{25} = 0,$$

$$x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{12}{25} = 0,$$

čo je kvadratická rovnica s koreňmi $\frac{3}{5}$ a $\frac{4}{5}$. Naša sústava rovníc tak má práve dve riešenia $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ a $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$. To znamená, že trojica strán (a, b, c) má pre každý vyhovujúci trojuholník tvar $(3d, 4d, 5d)$ alebo $(4d, 3d, 5d)$, kde d je kladné reálne číslo.

Keďže $4d$ je aritmetickým priemerom zvyšných dĺžok $3d$ a $5d$, tvrdenie zo zadania je dokázané.

Poznámka:

Vďaka vzorcu $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$ je dĺžka d rovná práve polomeru r.

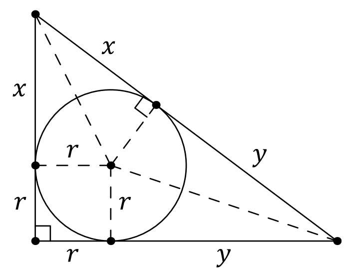
Poznámka:

Naznačme, ako je možné po odvodení vzťahu $(a + b - c)/c = 2/5$ postupovať inak. Vyplýva z neho vyjadrenie $c = 5(a + b)/7$, ktoré dosadíme za c do rovnosti $c^2 = a^2 + b^2$ z Pytagorovej vety. Po jednoduchých úpravách dostaneme rovnosť

$$12a^2 - 25ab + 12b^2 = 0.$$

Vyriešením tejto kvadratickej rovnice s neznámou a a parametrom b získame korene $3b/4$ a $4b/3$. Zo vzťahu $c = 5(a + b)/7$ tak dĺžky strán nášho trojuholníka tvoria jednu z trojíc $(3b/4, b, 5b/4)$ alebo $(4b/3, b, 5b/3)$, z ktorých po preznačení $b = 4d$, resp. $b = 3d$ dostaneme rovnaké trojice $(3d, 4d, 5d)$ a $(4d, 3d, 5d)$ ako v pôvodnom riešení.

Riešenie 2:



Na obrázku je nakreslený pravouhlý trojuholník, kružnica jemu vpísaná s vyznačenými bodmi dotyku a tri im prislúchajúce polomery veľkosti r. Tie rozdeľujú celý trojuholník na štvorec so stranou dĺžky r a dva štvoruholníky, ktoré sú deltoidmi vďaka ich súmernostiam podľa vyznačených uhlopriečok ležiacich na osiach vnútorných uhlov trojuholníka. Jeden deltoid tak má strany dĺžok r, r, x, x a druhý strany dĺžok r, r, y, y. Odvesny trojuholníka majú teda dĺžky $x + r$, $y + r$ a jeho prepona má dĺžku $x + y$. Preto podľa Pytagorovej vety platí

$$(x + r)^2 + (y + r)^2 = (x + y)^2$$

a polomer R kružnice opísanej má vďaka Tálesovej vete veľkosť $R = \frac{1}{2}(x + y)$. Po jej dosadení do zadanej podmienky $r : R = 2 : 5$ dostaneme $r = \frac{1}{5}(x + y)$. Z toho vyplýva $x + y = 5r$, a teda $y = 5r - x$. Z toho dostávame

$$(x + r)^2 + ((5r - x) + r)^2 = (5r)^2,$$

takže

$$(x + r)^2 + (6r - x)^2 = (5r)^2,$$

$$(x^2 + 2xr + r^2) + (36r^2 - 12rx + x^2) = 25r^2,$$

$$2x^2 - 10xr + 12r^2 = 0,$$

$$x^2 - 5xr + 6r^2 = 0.$$

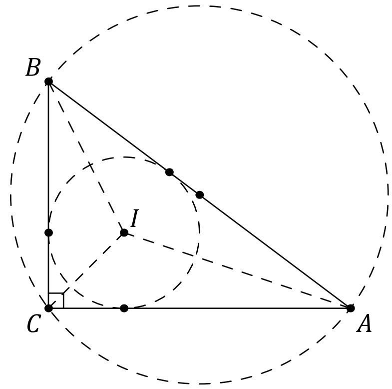
To je kvadratická rovnica s neznámou x a parametrom r, ktorá má korene $2r$ a $3r$. Podľa vzorca $y = 5r - x$ tak dostávame trojice $(3r, 4r, 5r)$ a $(4r, 3r, 5r)$, takže tvrdenie zo zadania úlohy platí.

Riešenie 3:

Nech ABC je predmetný pravouhlý trojuholník s preponou AB. Nech $a = |BC|$ a $b = |CA|$, bez ujmy na všeobecnosti $a \geq b$. Potom podľa Pytagorovej vety

$$|BC| = \sqrt{|BC|^2 + |CA|^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Nech I je stred kružnice vpísanej do trojuholníka ABC a r je jej polomer.



Potom platí

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|CA| &= S(ABC) = S(ABI) + S(BCI) + S(CAI)\\
&= \frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|A|\,BC + \frac{1}{2}\cdot|CA|\cdot|B|\,CA + \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|C|\,AB\\
&= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}r = \frac{1}{2}r\left(a+b+\sqrt{a^2+b^2}\right),
\end{aligned}$$

z čoho

$$r = \frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Keďže stred kružnice opísanej trojuholníku ABC leží v strede jeho prepony, jej polomer je $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$, podľa zadania teda platí

$$\frac{r}{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2}{5}.$$

Upravujme:

$$5r = \sqrt{a^2+b^2},$$

$$5\cdot\frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{a^2+b^2},$$

$$5ab = \sqrt{a^2+b^2}\left(a+b+\sqrt{a^2+b^2}\right),$$

$$5ab = \sqrt{a^2+b^2}(a+b) + (a^2+b^2),$$

$$5ab - (a^2+b^2) = \sqrt{a^2+b^2}(a+b),$$

$$25a^2b^2 - 10ab(a^2+b^2) + (a^2+b^2)^2 = (a^2+b^2)(a+b)^2,$$

$$25a^2b^2 - (10a^3b + 10ab^3) + (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) = (a^2+b^2)(a^2+2ab+b^2),$$

$$25a^2b^2 - 10a^3b - 10ab^3 + a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = a^4 + 2a^3b + a^2b^2 + a^2b^2 + 2ab^3 + b^4,$$

$$0 = 12a^3b - 25a^2b^2 + 12ab^3,$$

$$0 = 12a^2 - 25ab + 12b^2,$$

$$0 = \frac{a^2}{b^2} - \frac{25}{12}\cdot\frac{a}{b} + 1,$$

$$0 = \left(\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{25}{24} + \left(\frac{25}{24}\right)^2\right) - \left(\left(\frac{25}{24}\right)^2 - 1\right),$$

$$0 = \left(\frac{a}{b} - \frac{25}{24}\right)^2 - \left(\frac{25^2}{24^2} - 1\right),$$

$$0 = \left(\frac{a}{b} - \frac{25}{24}\right)^2 - \frac{25^2 - 24^2}{24^2},$$

$$0 = \left(\frac{a}{b} - \frac{25}{24}\right)^2 - \frac{(25-24)(25+24)}{24^2},$$

$$0=\left(\frac{a}{b}-\frac{25}{24}\right)^2-\frac{1\cdot 49}{24^2},$$

$$0=\left(\frac{a}{b}-\frac{25}{24}\right)^2-\frac{7^2}{24^2},$$

$$0=\left(\frac{a}{b}-\frac{25}{24}\right)^2-\left(\frac{7}{24}\right)^2,$$

$$0=\left(\left(\frac{a}{b}-\frac{25}{24}\right)+\frac{7}{24}\right)\left(\left(\frac{a}{b}-\frac{25}{24}\right)-\frac{7}{24}\right),$$

$$0=\left(\frac{a}{b}-\frac{18}{24}\right)\left(\frac{a}{b}-\frac{32}{24}\right),$$

$$0=\left(\frac{a}{b}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{a}{b}-\frac{4}{3}\right),$$

$$\frac{a}{b}\in\left\{\frac{3}{4},\frac{4}{3}\right\},$$

a keďže $a \geq b$, t. j. $\frac{a}{b} \geq 1$, platí $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$, t. j. $b = \frac{3}{4}a$. Nech $x = \frac{a}{4}$, potom

$$|BC| = a = 4x,$$

takže

$$|CA| = b = \frac{3}{4}a = \frac{3}{4}\cdot 4x = 3x,$$

a teda

$$|AB| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(4x)^2+(3x)^2} = \sqrt{16x^2+9x^2} = \sqrt{25x^2} = 5x.$$

Naozaj teda platí

$$\frac{|CA|+|AB|}{2} = \frac{5x+3x}{2} = \frac{8x}{2} = 4x = |BC|.$$

---

6 Rozhodnite, či možno štvorcovú tabuľku 4×4 vyplniť navzájom rôznymi prirodzenými číslami od 1 do 16 tak, že v každom riadku aj každom stĺpci existuje číslo, ktorého 7-násobok je súčtom zvyšných troch čísel.

(Jaromír Šimša)

Riešenie:

Dokážeme sporom, že to nie je možné.

Predpokladajme, že taká vyhovujúca tabuľka existuje. Potom v jej prvom riadku je číslo a a tri čísla so súčtom $7a$, v druhom číslo b a tri čísla so súčtom $7b$, v treťom číslo c a tri čísla so súčtom $7c$, vo štvrtom číslo d a tri čísla so súčtom $7d$. Súčty čísel v riadkoch sú potom postupne $8a$, $8b$, $8c$, $8d$, takže pre súčet všetkých 16 zapísaných čísel platí

$$8(a+b+c+d) = 1+2+\cdots+16 = (1+16)+(2+15)+\cdots+(8+9) = 8\cdot 17,$$

odkiaľ vyplýva $a+b+c+d=17$. Keďže súčet akýchkoľvek troch čísel z tabuľky je menší ako $3\cdot 16=48$, sú menšie ako 48 všetky štyri čísla $7a$, $7b$, $7c$, $7d$. Preto každé z navzájom rôznych čísel a, b, c, d je menšie ako 7. Ich súčet je však 17 a pritom $5+4+3+2=14<17$, preto jedno z čísel a, b, c, d je rovné 6.

Ak zopakujeme predchádzajúcu úvahu pre stĺpce uvažovanej tabuľky, zistíme dokopy, že číslo 6 má v tabuľke takúto pozíciu: Číslu $7\cdot 6$ čiže 42 sa rovná jednak súčet troch ďalších čísel z riadku čísla 6, jednak súčet troch ďalších čísel z jeho stĺpca. Súčet šiestich rôznych čísel tabuľky sa tak rovná číslu $2\cdot 42$ čiže 84, pritom však súčet šiestich najväčších čísel z tabuľky je iba $16+15+14+13+12+11$ čiže 81. Získaný spor existenciu vyhovujúcej tabuľky vylučuje.

Poznámka:

V tejto tabuľke vyplnenej číslami od 1 do 16 sa nájde – s výnimkou posledného stĺpca – v každom riadku aj stĺpci číslo, ktorého sedemnásobok je rovný súčtu ostatných troch čísel (v riadkoch ide o čísla 2, 4, 5, 6, v stĺpcoch o čísla 3, 4, 5).

3	1	10	2
8	4	11	9
7	15	5	13
6	12	14	16

Vidíme, že z ôsmich požiadaviek úlohy ich možno splniť sedem.

Riešenie 2:

Dôkaz sporom začneme rovnako ako v prvom riešení až do odvodenia rovnosti $a+b+c+d=17$ so sčítancami menšími ako 7. Ďalej už budeme pokračovať inak.

Čísla a, b, c, d so súčtom 17 sú štyri sčítance zo súčtu $1+2+3+4+5+6$ rovného 21. Zvyšné dva sčítance tak majú súčet $21-17$ čiže 4, ide preto o čísla 1 a 3, teda platí $\{a,b,c,d\}=\{2,4,5,6\}$. Zdôraznime, že je to štvorica čísel z rôznych riadkov a analogicky aj z rôznych stĺpcov.

Uvažujme teraz pozíciu čísla 2. Ako vieme, v jeho riadku aj v jeho stĺpci sú po tri čísla so súčtom rovným $7 \cdot 2$ čiže 14. Dokopy ide o šesť rôznych čísel so súčtom $2 \cdot 14$ čiže 28, ktoré sú navyše rôzne od 2, 4, 5, 6. Súčet takých šiestich čísel je však aspoň $1+3+7+8+9+10$ čiže 38, čo je spor.

Poznámka:

Iné dokončenie: Obe trojice čísel, ktoré zdieľajú s číslom 2 rovnaký riadok alebo rovnaký stĺpec, musia byť zložené z čísel 1, 3 a 10, lebo iné tri do úvahy prichádzajúce čísla s požadovaným súčtom $7 \cdot 2$ čiže 14 zrejme neexistujú.