

2011/2012

61. ročník MO

Zadania úloh celoštátneho kola kategórie A

(Súťaž sa konala 25. – 28. 3. 2012.)

1. Nájdite všetky celé čísla n , pre ktoré je $n^4 - 3n^2 + 9$ prvočíslo. (Aleš Kobza)

2. Zistite, aký je najväčší možný obsah trojuholníka ABC , ktorého ťažnice majú dĺžky spĺňajúce nerovnosti $t_a \leq 2$, $t_b \leq 3$, $t_c \leq 4$. (Pavel Novotný)

3. Dokážte, že medzi ľubovoľnými 101 reálnymi číslami existujú dve čísla u a v , pre ktoré platí

$$100|u - v| \cdot |1 - uv| \leq (1 + u^2)(1 + v^2).$$

(Pavel Calábek)

4. Vnútri rovnobežníka $ABCD$ je daný bod X . Zostrojte priamku, ktorá prechádza bodom X a rozdeľuje daný rovnobežník na dve časti, ktorých obsahy sa navzájom líšia čo najviac. (Vojtech Bálint)

5. V skupine 90 detí má každé aspoň 30 kamarátov (kamarátstvo je vzájomné). Dokážte, že ich možno rozdeliť do troch 30-členných skupín tak, aby každé dieťa malo vo svojej skupine aspoň jedného kamaráta. (Ján Mazák)

6. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$x^4 + y^2 + 4 = 5yz,$$

$$y^4 + z^2 + 4 = 5zx,$$

$$z^4 + x^2 + 4 = 5xy.$$

(Jaroslav Švrček)