MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Riešenia úloh školského kola kategórie C

1 Žiakov priemer známok je presne 3. Keby sme tri z jeho pätiek do priemeru nezapočítali, bol by priemer jeho známok presne 2. Určte najväčší počet jednotiek, ktoré mohol dostať. (Možné známky sú 1, 2, 3, 4, 5.)

(Patrik Bak)

Riešenie:

Označme s súčet všetkých žiakových známok a p ich počet. Podľa zadania $\frac{s}{p} = 3$, čiže $s = 3p$. Podľa druhej vety zadania zostavíme pre neznáme s a p ďalšiu rovnicu a upravíme ju:

$$\frac{s - 3 \cdot 5}{p - 3} = 2,$$

$$s - 15 = 2p - 6,$$

$$s = 2p + 9.$$

Odtiaľ po dosadení $s = 3p$ dostaneme

$$3p = 2p + 9,$$

$$p = 9,$$

a potom

$$s = 3 \cdot 9 = 27.$$

Okrem 3 pätiek teda žiak dostal ešte ďalších 6 známok so súčtom $27 - 3 \cdot 5$ čiže 12. Nemohlo to byť ani 6 jednotiek (so súčtom iba 6), ani 5 jednotiek, pretože šiesta známka by potom bola $12 - 5 \cdot 1$ čiže 7. Avšak 4 jednotky dostať mohol, jeho zvyšné 2 známky so súčtom $12 - 4$ čiže 8 by potom boli buď 2 štvorky, alebo trojka a päťka.

Najväčší možný počet žiakových jednotiek je teda 4.

Pokyny:

V prípade neúplných postupov oceňte čiastkové kroky nasledovne:

- A0 Uvedenie správnej odpovede bez zdôvodnenia: 0 bodov.
- A1 Uvedenie správnej odpovede spolu s vyhovujúcim príkladom sady známok: 1 bod.
- A2 Prepis slovného zadania úlohy do matematickej symboliky (najčastejšie do sústavy dvoch rovníc s dvomi neznámymi): 1 bod.
- A3 Vyriešenie matematickej úlohy z bodu A2 alebo iné zdôvodnenie vedúce k záveru, že žiak dostal 9 známok (resp. 6 známok, ak neuvažujeme tri päťky): 4 body.
- A4 Zdôvodnenie, prečo žiak nemohol dostať viac ako 4 jednotky: 5 bodov.

Celkovo potom dajte súčet počtu bodov za A1 a maxima počtov bodov za A2, A3 a A4.

V úplnom riešení musí byť zdôvodnené, že situácia so štyrmi jednotkami môže skutočne nastať (najčastejšie príkladom sady známok, ako je uvedené v bode A1).

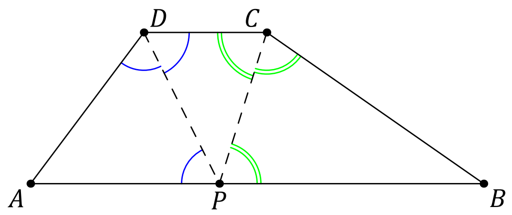
---

2 V lichobežníku $ABCD$, pričom $AB \parallel CD$, sa osi vnútorných uhlov pri vrcholoch C a D pretínajú na úsečke AB. Dokážte, že platí $|AD| + |BC| = |AB|$.

(Patrik Bak)

Riešenie:

Uvažujme najskôr os uhla pri vrchole D. Tá pretne základňu AB v bode, ktorý označíme P. Os uhla príslušný uhol rozpoľuje, takže modro vyznačené uhly ADP a CDP sú zhodné. Vďaka tomu, že $AB \parallel CD$, je s nimi zhodný aj uhol APD, striedavý k uhlu CDP. Z rovnosti $|\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle APD|$ vyplýva, že trojuholník ADP je rovnoramenný so základňou DP.



Podľa zadania os uhla BCD pretína základňu AB v tom istom bode P. Analogicky ako vyššie sa zdôvodní zhodnosť zeleno vyznačených uhlov, a teda aj rovnoramennosť trojuholníka BCP so základňou CP.

Využitím oboch nájdených rovnoramenných trojuholníkov už dostávame

$$|AD| + |BC| = |AP| + |BP| = |AB|\,.$$

Pokyny:

V prípade neúplných postupov oceňte čiastkové kroky nasledovne:

- A1 Náčrt, v ktorom sa osi uhlov BCD a CDA pretnú na základni AB a v ktorom sú vyznačené oba páry zhodných uhlov pri vrcholoch C aj D (tolerujte, keď zhodnosť týchto uhlov nie je zapísaná v texte): 1 bod.
- A2 Pozorovanie, že $|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle PDC|$ alebo že $|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle PCD|$: 2 body.
- A3 Dôkaz, že platí aspoň jedna z rovností $|AD| = |AP|$ alebo $|BC| = |BP|$ (alebo že aspoň jeden z trojuholníkov ADP a BCP je rovnoramenný): 3 body.
- A4 Dôkaz, že platia obe rovnosti $|AD| = |AP|$ alebo $|BC| = |BP|$ (alebo že oba trojuholníky ADP a BCP sú rovnoramenné): 4 body.
- B1 Záznam myšlienky, že na dôkaz tvrdenia by stačilo, keby platilo $|AD| = |AP|$ alebo $|BC| = |BP|$: 2 body.

Celkovo potom dajte súčet počtu bodov za B1 a maxima z počtov bodov za A1, A2, A3 a A4.

---

3 Tabuľka 3×3 je vyplnená kladnými celými číslami tak, že súčet čísel v každom riadku aj v každom stĺpci je 10. Najviac koľko z týchto čísel môže byť

a) rovnakých,

b) rôznych?

(Ján Mazák)

Riešenie:

a) 6 rovnakých čísel je napríklad v tejto tabuľke spĺňajúcej podmienky úlohy:

8	1	1
1	8	1
1	1	8

Keby v tabuľke bolo aspoň 7 rovnakých čísel, obsahoval by niektorý riadok 3 z nich. Súčet 3 rovnakých celých čísel však nemôže byť 10.

Najväčší možný počet rovnakých čísel v tabuľke je teda 6.

b) Tabuľka môže obsahovať 6 rôznych čísel, jeden z mnohých príkladov vyzerá takto:

7	1	2
1	6	3
2	3	5

Zdôvodníme, že viac ako 6 rôznych čísel tabuľka obsahovať nemôže:

V tabuľke sa môžu nachádzať iba celé čísla od 1 do 8. Keby v nej totiž bolo číslo väčšie ako 8, súčet čísel v riadku s týmto číslom by bol aspoň $9 + 1 + 1$, čo je viac ako 10.

Vieme teda, že keby bolo v tabuľke aspoň sedem rôznych čísel, niektorým z nich by muselo byť jedno z čísel 7 alebo 8. Obe možnosti teraz posúdime oddelene:

- Prítomnosť čísla 8 v tabuľke znamená, že v riadku a stĺpci s číslom 8 je po dvoch číslach 1, takže v celej tabuľke je najviac 6 rôznych čísel (okrem 8 a 1 to môžu byť len čísla zo 4 políčok mimo spomínaného riadka a stĺpca).

- Prítomnosť čísla 7 v tabuľke znamená, že v riadku aj stĺpci s číslom 7 sú v oboch prípadoch čísla 1 a 2. Z ostatných štyroch čísel tabuľky označíme ako x to z nich, ktoré leží v riadku jedného z dvoch spomínaných čísel 1 a súčasne v stĺpci druhého z nich, ako v tabuľke, v ktorej sú zvyšné 3 čísla označené krúžkami:

1	7	2
$\bullet$	2	$\circ$
x	1	$\bullet$

  V riadku aj stĺpci s číslami x a 1 musí ako tretie byť číslo $9 - x$. Dva plné krúžky v tabuľke tak označujú rovnaké číslo, teda v tabuľke je opäť najviac šesť rôznych čísel.

Najväčší možný počet rôznych čísel v tabuľke je teda 6.

Riešenie 2:

Odlišným spôsobom zdôvodníme, prečo tabuľka nemôže obsahovať sedem alebo viac rôznych čísel.

Súčet všetkých čísel v tabuľke je zrejme $3 \cdot 10$ čiže 30. Súčet 7 rôznych kladných celých čísel je aspoň $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ čiže 28. Ak teda nájdeme v tabuľke 7 rôznych čísel, budú mať zvyšné dve čísla súčet najviac $30 - 28$ čiže 2, takže to budú 1 a ostatných sedem rôznych čísel v tabuľke so súčtom 28 budú nutne všetky čísla od 1 do 7. Zostáva tak posúdiť, či je možné tabuľku správne vyplniť číslami 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Na to už stačí len využiť rovnaký poznatok ako v prvom riešení: V riadku aj stĺpci s číslom 7 sú v oboch prípadoch čísla 1 a 2. To však odporuje tomu, že číslo 2 má byť v tabuľke iba raz.

Poznámka:

Ukážme, že existenciu vyhovujúcej tabuľky s číslami 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 môžeme vylúčiť aj inak:

V žiadnom riadku ani stĺpci takejto tabuľky nemôžu byť dve čísla 1, pretože $1 + 1 + 7 < 10$. Preto v každom riadku aj stĺpci je po jednom čísle 1. Akékoľvek číslo x z $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ má preto vo svojom riadku aj stĺpci jedno číslo 1, teda tretím číslom tam je v oboch prípadoch číslo $9-x$. Žiadne číslo $9-x$ však nie je k dispozícii dvakrát.

$\circ$	1	$\circ$
$\circ$	$\bullet$	1
1	x	$\bullet$

V riadku aj stĺpci s číslami x a 1 musí ako tretie byť číslo $9 - x$. Dva plné krúžky v tabuľke tak označujú rovnaké číslo, teda v tabuľke je opäť najviac šesť rôznych čísel.

Najväčší možný počet rôznych čísel v tabuľke je teda 6.

Poznámka:

Je možné ukázať, že každá vyhovujúca tabuľka so 6 rôznymi číslami je vyplnená niektorou z týchto devätíc čísel:

- (1, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 6, 7),
- (1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 7),
- (1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6),
- (1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6).

Pokyny:

2 body dajte za časť a) a 4 body za časť b).

V prípade neúplných postupov oceňte čiastkové kroky nasledovne (uvažujeme len tabuľky vyhovujúce zadaniu):

- A1 Príklad tabuľky so 6 rovnakými číslami: 1 bod.
- A2 Zdôvodnenie, prečo tabuľka nemôže obsahovať viac ako 6 rovnakých čísel: 1 bod.

Celkovo za časť a) potom dajte súčet počtov bodov za A1 a A2.

- B1 Príklad tabuľky so 6 rôznymi číslami: 1 bod.
- B2 Zdôvodnenie, prečo tabuľka nemôže obsahovať viac ako 7 rôznych čísel: 1 bod.
- B3 Zdôvodnenie, prečo tabuľka s číslom 8 obsahuje najviac 6 rôznych čísel: 1 bod.
- B4 Zdôvodnenie, prečo tabuľka s číslom 7 obsahuje najviac 6 rôznych čísel: 2 body.
- B5 Zdôvodnenie, prečo tabuľka s (aspoň) 7 rôznymi číslami by musela byť vyplnená číslami 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7: 2 body.
- B6 Zdôvodnenie, prečo tabuľka nemôže obsahovať viac ako 6 rôznych čísel: 3 body.

Celkovo za časť b) potom dajte súčet počtu bodov za B1 a maxima počtov bodov za B1, B2, B3, B4, B5.