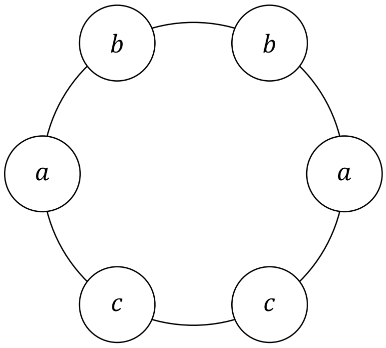
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Riešenia úloh školského kola kategórie B

1 Kladné celé čísla a, b, c sú umiestnené do kruhu ako na obrázku, pričom každé číslo je deliteľom súčtu dvoch čísel s ním susediacich. Najviac koľko z čísel a, b, c môže byť rôznych?



(Josef Tkadlec)

Riešenie 1:

Nech kladné celé čísla a, b, c vyhovujú zadaniu úlohy. To je možné vyjadriť tromi podmienkami:

- $a \mid b + c$, čiže $b + c = ma$ pre nejaké kladné celé číslo m,
- $b \mid a + b$, čiže $b \mid a$,
- $c \mid a + c$, čiže $c \mid a$.

Z $b \mid a$ vyplýva, že číslo b delí oba členy na pravej strane upravenej rovnosti $c = ma - b$, a teda $b \mid c$. Podobne z $c \mid a$ a $b = ma - c$ vyplýva $c \mid b$. Pre kladné celé čísla b a c vzťahy $b \mid c$ a $c \mid b$ znamenajú, že $b = c$. To teda znamená, že medzi číslami a, b, c môžu byť najviac dve rôzne.

Počet 2 dosiahneme napríklad v prípade $a = 2$ a $b = c = 1$.

Riešenie 2:

Namiesto rovnosti $b = c$ z prvého riešenia dokážeme, že prirodzené čísla a, b, c také, že $a \mid b + c$, $b \mid a$ a $c \mid a$, nemôžu byť navzájom rôzne.

Predpokladajme teda, že platí $a \neq b$, $b \neq c$ a $c \neq a$. Potom zo vzťahov $b \mid a$ a $c \mid a$ vyplývajú nerovnosti $a \geq 2b$ a $a \geq 2c$. Ich sčítaním dostaneme $a + a \geq 2b + 2c$, čiže $a \geq b + c$, kde vďaka vzťahu $a \mid b + c$ musí platiť $a = b + c$. Preto platí $a = 2b$ a $a = 2c$, inak by aspoň jedna z nerovností $a \geq 2b$ a $a \geq 2c$ bola ostrá, a platilo by potom $a > b + c$. Z toho $2b = 2c$, tak6e $b = c$. Preto všetky tri nerovnosti $a \neq b$, $b \neq c$ a $c \neq a$ nemôžu platiť súčasne.

Poznámka:

Aj keď to zadanie úlohy nevyžaduje, ukážeme (dokonca dvoma spôsobmi), že všetky vyhovujúce trojice (a, b, c) sú tvaru (b, b, b) a $(2b, b, b)$, kde b je ľubovoľné kladné celé číslo.

Pri prvom postupe využijeme rovnosť $b = c$, ktorú sme dokázali v prvom riešení. Vďaka nej sa podmienky $b + c = ma$, $b \mid a$ a $c \mid a$ zredukujú na vzťahy $2b = ma$ a $b \mid a$. Keďže z $b \mid a$ vyplýva $2b \leq 2a$, z rovnosti $2b = ma$ dostávame $m = 1$ alebo $m = 2$. Trojica (a, b, c) sa podľa toho rovná $(2b, b, b)$, resp. (b, b, b).

Pri druhom postupe vyjadríme podmienky $a \mid b + c$, $b \mid a$ a $c \mid a$ vzťahmi

$$b + c \in \{a, 2a, 3a, 4a, \dots\}$$

a

$$b, c \in \left\{a, \frac{1}{2}a, \frac{1}{3}a, \frac{1}{4}a, \dots\right\}.$$

Z druhého vzťahu vyplýva $b + c \leq 2a$, teda podľa prvého vzťahu buď platí $b + c = a$, a to práve keď $b = c = \frac{1}{2}a$, alebo platí $b + c = 2a$, a to práve keď $b = c = a$.

Pokyny:

Dajte 1 bod za správnu odpoveď a 5 bodov za dôkaz tvrdenia, že a, b, c nemôžu byť tri rôzne čísla. Bod za správnu odpoveď však priznajte, len keď je k nej uvedená aspoň jedna vyhovujúca trojica (a, b, c), napríklad $(2, 1, 1)$

alebo $(2b, b, b)$. Z 5 bodov za dôkaz dajte 1 bod za zápis (napríklad aj slovný) všetkých troch deliteľností $a \mid b+c$, $b \mid a$, $c \mid a$ a ďalší 1 bod za aspoň jednu z nerovností $a \leq b+c$, $b \leq a$, $c \leq a$. Za všetky tri nerovnosti a výsledok $b+c \leq 2a$ sčítania posledných dvoch z nich dajte 3 body (pozri druhý postup z poznámky). Pri postupe podobnom tomu z iného riešenia dajte 2 body za aspoň jednu z nerovností $a \geq 2b$ alebo $a \geq 2c$ a ďalší 1 bod za ich sčítanie.

---

2 Nech $ABCD$ je obdĺžnik so stredom S a dlhšou stranou AB. Kolmica na priamku BD prechádzajúca vrcholom B pretne priamku AC v bode E. Rovnobežka s priamkou BE vedená stredom S pretne stranu CD v bode F. Predpokladajme, že $|CE| = |BC|$.

a) Určte veľkosť uhla BSC.

b) Dokážte, že $|DF| = 2\,|CF|$.

(Jaroslav Švrček)

Riešenie 1:

Popíšeme niekoľko postupov riešenia oboch častí a) a b). Bez komentára v nich budeme využívať známe rovnosti $|AS| = |BS| = |CS| = |DS|$. Zdôraznime ešte, že podmienka $|AB| > |BC|$ zo zadania úlohy zaručuje, že bod E leží na predĺžení uhlopriečky AC za bod C.

a) • Postup 1:

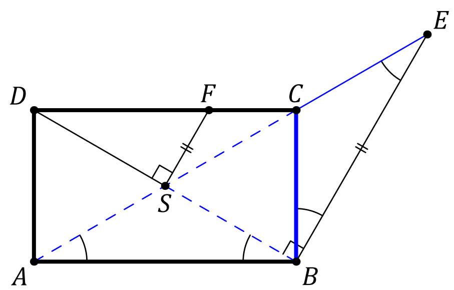
Bod C leží na prepone SE pravouhlého trojuholníka SBE. Súčasne leží na osi jeho odvesny BE, pretože $|CB| = |CE|$ podľa zadania. Z Tálesovej vety teda vyplýva, že kružnica opísaná tomuto trojuholníku má stred práve v bode C. Platia preto rovnosti $|CB| = |CE| = |CS| = |BS|$, odkiaľ vyplýva, že trojuholník BSC je rovnostranný. Hľadaná veľkosť uhla BSC je preto $60°$.

• Postup 2:

Uhly EBS a CBA sú pravé, a teda zhodné, a uhol CBS je ich spoločnou časťou, a preto aj uhly EBC a SBA sú zhodné. Z rovnoramenných trojuholníkov BEC a ABS však vyplýva $|\sphericalangle EBC| = |\sphericalangle CEB|$ a $|\sphericalangle SBA| = |\sphericalangle BAS|$. Platí teda $|\sphericalangle CEB| = |\sphericalangle BAS|$, čiže $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle BAE|$, a preto je aj trojuholník EAB rovnoramenný a platí $|BE| = |AB|$. Rovnoramenné trojuholníky BEC a ABS sú teda podľa vety *usu* zhodné. Platí preto $|BC| = |BS| = |CS|$, trojuholník BSC je teda rovnostranný, odkiaľ $|\sphericalangle BSC| = 60°$.

• Postup 3:

Označme φ veľkosť uhlov pri základni BE rovnoramenného trojuholníka BEC. Vzhľadom na to, že platí $|\sphericalangle EBS| = 90°$, je potom $90° - \varphi$ veľkosť uhlov pri základni BC rovnoramenného trojuholníka BCS, a preto jeho tretí uhol BSC má veľkosť 2φ. Trojuholník SBE tak má vnútorné uhly veľkostí $90°$, φ a 2φ, platí teda $\varphi + 2\varphi = 90°$, odkiaľ $\varphi = 30°$, a preto $|\sphericalangle BSC| = 2\varphi = 60°$.



b) • Postup 1:

Uhol FSD je rovnako ako uhol EBD pravý, pretože $FS \parallel EB$ podľa zadania. Z riešenia časti a) vieme, že BSC je rovnostranný trojuholník. Rovnoramenný trojuholník CDS má preto vnútorné uhly veľkostí $30°$, $30°$ a $120°$. Odtiaľ dostávame

$$|\sphericalangle FCS| = |\sphericalangle DCS| = 30°$$

a

$$|\sphericalangle CSF| = |\sphericalangle CSD| - |\sphericalangle FSD| = 120° - 90° = 30°,$$

takže CFS je rovnoramenný trojuholník a platí $|SF| = |CF|$. Namiesto rovnosti $|DF| = 2\,|CF|$ teda stačí dokázať rovnosť $|DF| = 2\,|SF|$. Tá však, ako je známe, vyplýva z pravouhlého trojuholníka FDS, lebo $|\sphericalangle FDS| = 30°$.

(Vyplýva to z pozorovania, že rovnostranný trojuholník je svojou výškou rozdelený na dva zhodné trojuholníky s uhlami $30°$, $60°$, $90°$. Je tiež možné priamo využiť z toho vyplývajúcu rovnosť $\sin 30° = \frac{1}{2}$.)

- Postup 2:

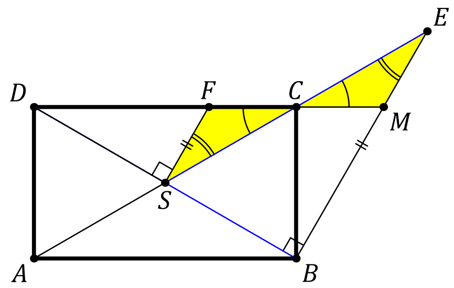
  Nech $d = |CS| = |BS| = |DS|$. Z riešenia časti a) vieme, že potom platí aj $|BC| = d$, čo spolu s $|DB| = 2d$ vedie podľa Pytagorovej vety k rovnosti $|DC| = d\sqrt{3}$. Z podobnosti pravouhlých trojuholníkov FDS a BDC máme $|DF| \,/\, |DS| = |DB| \,/\, |DC|$, odkiaľ

  $$|DF| = \frac{|DB| \cdot |DS|}{|DC|} = \frac{2d \cdot d}{d\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \cdot d\sqrt{3} = \frac{2}{3}\,|DC|\,.$$

  To už zrejme znamená, že platí $|DF| = 2\,|CF|$, ako sme mali dokázať.

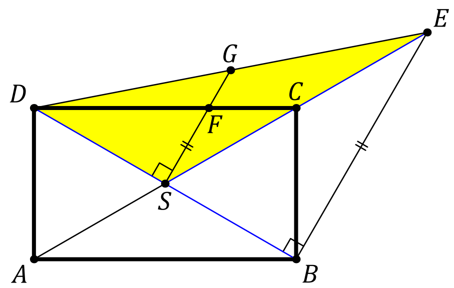
- Postup 3:

  Označme M priesečník priamok CD a BE. Keďže S je stred úsečky BD a $SF \parallel BM$, úsečka SF je stredná priečka trojuholníka BMD, teda platí $|DF| = |FM|$. Našou úlohou je preto ukázať, že C je stred úsečky FM. Na to stačí overiť, že sú zhodné trojuholníky CFS a CME. Tie však majú zhodné vrcholové uhly pri spoločnom vrchole C a rovnako zhodné striedavé uhly pri vrcholoch F a M. Napokon sú zhodné aj ich strany CS a CE, ako sme ukázali v riešeniach časti a). Podľa vety *usu* sú teda trojuholníky CFS a CME naozaj zhodné.



- Postup 4:

  Označme G stred úsečky DE. Potom SG je stredná priečka trojuholníka BDE, a teda okrem $FS \parallel BE$ platí aj $SG \parallel BE$. Preto bod F leží na priečke SG, ktorá je zároveň ťažnicou trojuholníka SED. Aj úsečka DC je jeho ťažnicou, lebo $|CS| = |CE|$ podľa riešenia časti a). Priesečník F týchto dvoch ťažníc je teda ťažiskom trojuholníka SED, a preto platí $|DF| = 2\,|CF|$, ako sme mali dokázať.

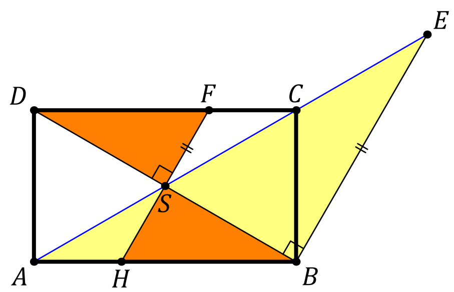


- Postup 5:

  Označme H priesečník priamky SF so stranou AB. Zo stredovej súmernosti obdĺžnika $ABCD$ a z podobnosti trojuholníkov AHS a ABE (podľa vety *uu*) vyplýva

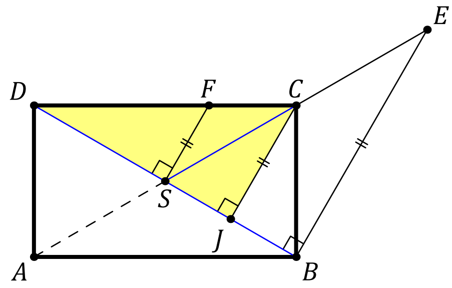
  $$\frac{|DF|}{|CF|} = \frac{|BH|}{|AH|} = \frac{|BA|}{|AH|} - 1 = \frac{|EA|}{|AS|} - 1 = \frac{|ES|}{|AS|}.$$

  Podľa riešenia časti a) však platí $|EC| = |CS| = |SA|$, takže $|ES| \,/\, |AS| = 2$, a preto tiež $|DF| \,/\, |CF| = 2$.



- Postup 6:

  Označme J stred úsečky BS. Podľa riešenia časti a) je trojuholník BSC rovnostranný, takže úsečka CJ je jeho výška. Následne zo vzťahov $CJ \perp BD$ a $FS \perp BD$ vyplýva, že trojuholníky CDJ a FDS sú podľa vety *uu* podobné. Preto zo zrejmej rovnosti $|DS| = \frac{2}{3}\,|DJ|$ vyplýva $|DF| = \frac{2}{3}\,|DC|$. To už znamená, že naozaj platí $|DF| = 2\,|CF|$.

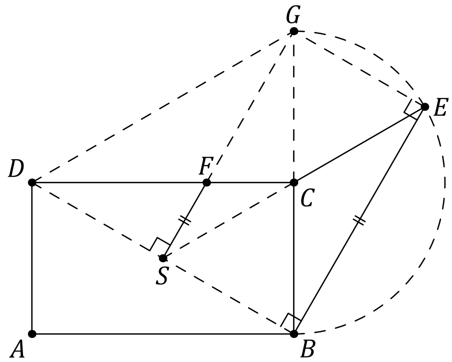


Riešenie 2:

Nech G je bod stredovo súmerný s bodom B podľa stredu C. Potom $|CB| = |CE| = |CG|$, takže C je stred kružnice opísanej trojuholníku BEG. Podľa Tálesovej vety je preto uhol BEG pravý. Štvoruholník $SBEG$ je teda obdĺžnik, takže stred C jeho uhlopriečky BG je sj stredom jeho druhej uhlopriečky SE. Platí preto

$$|SB| = \frac{1}{2}\,|BD| = \frac{1}{2}\,|AC| = |CS| = |CE| = |CB|\,,$$

trojuholník BSC je rovnostranný, takže $|\sphericalangle BSC| = 60°$.



Keďže SC je stredná priečka trojuholníka BDG, aj trojuholník BDG je rovnostranný. Jeho ťažnica SG je preto kolmá na stranu BD, takže na nej leží aj bod F. Keďže tento bod leží aj na jeho druhej ťažnici CD, je to jeho ťažisko. Preto $|DF| = 2\,|CF|$.

Pokyny:

Po 3 bodoch dajte za každú z častí a) a b).

V prípade neúplných postupov oceňte čiastkové kroky v riešení 1 nasledovne:

A1 Dôkaz rovnosti $|AB| = |BE|$: 1 bod.

A2 Dôkaz rovnosti $|SC| = |CE|$ (alebo tvrdenie, že C je stred kružnice opísanej trojuholníku BSE): 2 body.

A3 Ak je riešenie časti a) založené na výpočtoch uhlov (ako v našom postupe 3), dajte:

- 1 bod za označenie neznámej veľkosti (povedzme φ) jedného z uhlov pri vrchole B, C, S alebo E s cieľom vyjadriť pomocou φ veľkosti ďalších uhlov potrebných na výpočet tejto neznámej;
- 1 bod za spomínané vyjadrenia vedúce k zostaveniu rovnice pre jednu neznámu φ (na základe súčtu 180° uhlov vhodného trojuholníka alebo rovnosti $|\sphericalangle EBS| = 90°$ alebo rovnoramennosti jedného z trojuholníkov BEC a BCS);
- 1 bod za vyriešenie zostavenej rovnice a určenie hodnoty $|\sphericalangle BSC|$.

Za zavedenie viac ako jednej neznámej žiadny bod neudeľujte, pokiaľ nie je ich elimináciou získaná rovnica s jednou neznámou (za 2 body), alebo je zapísaná sústava rovníc, ktorá má jediné riešenie (taktiež za 2 body).

B1 Dôkaz, že trojuholník CFS je rovnoramenný: 1 bod.

B2 Dôkaz rovnosti $|DF| = 2\,|SF|$: 1 bod.

B3 Myšlienka využiť podobnosť trojuholníkov DFS a DBC na porovnanie dĺžok ich strán: 1 bod.

B4 Dokreslenie aspoň jedného z bodov M, G, H, J: 1 bod.

Za časť a) dajte maximum z bod za A1, A2, A3. Za časť b) dajte maximum z počtov bodov za B3 a za B4 a zo súčtu bodov za B1 a za B2.

V prípade neúplných postupov oceňte čiastkové kroky v riešení 2 nasledovne:

- Dokreslenie bodu G: 1 bod.
- Dôkaz rovnostrannosti trojuholníka BDG: 1 bod.
- Dôkaz toho, že F leží na úsečke SG: 1 bod.

Absenciu zmienky o polohe bodu E na polpriamke opačnej k polpriamke CA tolerujte.

---

3 Pre nenulové reálne čísla a, b, c platí

$$a^2(b+c) = b^2(c+a) = c^2(a+b).$$

Určte všetky možné hodnoty výrazu

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

(Jaromír Šimša)

Riešenie 1:

Zdôraznime, že vďaka nenulovosti čísel a, b, c platí $a^2+b^2+c^2>0$, takže uvažovaný výraz má zmysel a naše výpočty jeho hodnôt budú korektné.

Upravujme najprv prvú zo zadaných rovností:

$$\begin{aligned} a^2(b+c) &= b^2(c+a), \\ a^2b+a^2c &= b^2c+b^2a, \\ a^2b-b^2a &= b^2c-a^2c, \\ ab(a-b) &= c(b-a)(b+a), \\ ab(a-b) &= (b-a)(cb+ca), \\ (a-b)(ab+bc+ca) &= 0. \end{aligned}$$

Analogickou úpravou druhej rovnosti dostaneme

$$(b-c)(ab+bc+ca) = 0.$$

Vidíme, že ak $ab+bc+ca \neq 0$, tak platí $a-b=0$ aj $b-c=0$, čo znamená $a=b=c$. Platí teda $ab+bc+ca=0$ alebo $a=b=c$. Pozrime sa na hodnotu daného výrazu v každom z oboch prípadov.

- V prípade $ab+bc+ca=0$ platí
$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} = 1.$$
- V prípade $a=b=c$ platí
$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{(3a)^2}{a^2+a^2+a^2} = \frac{9a^2}{3a^2} = 3.$$

Oba prípady sú možné, napríklad prvý nastane v prípade $(a,b,c) = (2,2,-1)$ a druhý v prípade $(a,b,c) = (1,1,1)$.

Jediné možné hodnoty výrazu zo zadania sú teda 1 a 3.

Riešenie 2:

Kratším postupom odvodíme podmienku, že platí $ab+bc+ca=0$ alebo $a=b=c$. (Potom už je možné riešenie dokončiť rovnako ako v riešení 1.)

Ak odčítame $(b+c)(c+a)(a+b)$ od každého z troch výrazov v $a^2(b+c) = b^2(c+a) = c^2(a+b)$, dostaneme po vyňatí spoločných činiteľov rovnosti

$$a^2(b+c)-(b+c)(c+a)(a+b) = b^2(c+a)-(b+c)(c+a)(a+b) = c^2(a+b)-(b+c)(c+a)(a+b),$$

t. j.

$$(b+c)\left(a^2-(c+a)(a+b)\right) = (c+a)\left(b^2-(a+b)(b+c)\right)(a+b)\left(c^2-(b+c)(c+a)\right),$$

t. j.

$$(b+c)\left(-(ab+bc+ca)\right) = (c+a)\left(-(ab+bc+ca)\right)(a+b)\left(-(ab+bc+ca)\right),$$

a teda

$$(b + c)(ab + bc + ca) = (c + a)(ab + bc + ca)(a + b)(ab + bc + ca),$$

Odtiaľ v prípade $ab + bc + ca \neq 0$ vychádza

$$b + c = c + a = a + b,$$

a teda $a = b = c$.

Pokyny:

Absenciu úvodnej zmienky o tom, že zadaný výraz má zmysel, tolerujte. V prípade neúplných postupov oceňte čiastkové kroky nasledovne:

- A1 Odvodenie rozkladu $(a - b)(ab + bc + ca)$ alebo analogického: 2 body.
- A2 Zdôvodnenie, že platí $a = b = c$ alebo $ab + bc + ca = 0$: 3 body.
- B Určenie hodnoty výrazu v prípade $ab + bc + ca = 0$: 1 bod.
- C Uvedenie príkladu nenulových čísel a, b, c spĺňajúcich okrem rovností zo zadania aj rovnosť $ab+bc+ca = 0$: 1 bod.
- D Určenie hodnoty výrazu v prípade $a = b = c$: 1 bod.

Celkovo potom dajte maximum zo súčtu bodov za A1 a A2 a z počtov bodov za B, C a D:

Za akékoľvek úpravy zadaných rovností, ktoré nevedú k záveru z A1 ani A2, žiadne body neudeľujte. Ak by riešiteľ podľa doterajších pokynov nemal získať žiadny bod, dajte 1 bod za uvedenie hypotézy, že jediné možné hodnoty daného zlomku sú 1 a 3, ak sú obe doložené príkladom trojice (a, b, c) nenulových čísel, ktorá spĺňa rovnosti zo zadania.