61. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Celoštátne kolo kategórie A

25.–28. marec 2012, Rakovice, kraj Trnava

---

1. *Nájdite všetky celé čísla n, pre ktoré je $n^4 - 3n^2 + 9$ prvočíslo.* (*Aleš Kobza*)

Riešenie. Zadaný výraz možno jednoduchou úpravou rozložiť na súčin:

$$n^4 - 3n^2 + 9 = n^4 + 6n^2 + 9 - 9n^2 = (n^2 + 3)^2 - (3n)^2 = (n^2 + 3n + 3)(n^2 - 3n + 3).$$

Oba činitele sú celými číslami, teda deliteľmi súčinu. Aby súčin bol prvočíslom p, musí byť niektorý z činiteľov rovný 1, resp. -1 (a druhý p, resp. $-p$). Avšak diskriminant oboch kvadratických činiteľov je $(\pm 3)^2 - 4 \cdot 4 = -3$, teda záporný, čiže oba nadobúdajú len kladné hodnoty. Vzhľadom na to nemôžu nadobúdať hodnotu -1 a stačí uvažovať kvadratické rovnice

$$n^2 + 3n + 3 = 1 \qquad \text{a} \qquad n^2 - 3n + 3 = 1.$$

Riešením prvej rovnice sú hodnoty $n = -1$ a $n = -2$, pre ktoré druhý činiteľ nadobúda hodnoty 7 a 13, čo sú prvočísla.

Riešením druhej rovnice sú $n = 1$ a $n = 2$, pre ktoré prvý činiteľ nadobúda opäť prvočíselné hodnoty 7 a 13.

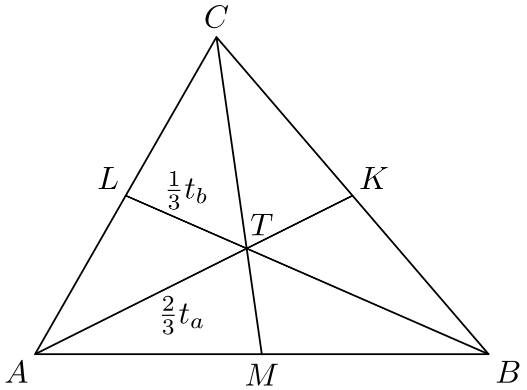
Odpoveď. Zadaný výraz je prvočíslom práve vtedy, keď $n \in \{-2, -1, 1, 2\}$.

---

2. *Zistite, aký je najväčší možný obsah trojuholníka ABC, ktorého ťažnice majú dĺžky spĺňajúce nerovnosti $t_a \leqq 2$, $t_b \leqq 3$, $t_c \leqq 4$.* (*Pavel Novotný*)

Riešenie. Označme T ťažisko trojuholníka ABC a K, L, M stredy strán BC, CA, AB. Ťažnice delia trojuholník ABC na šesť menších trojuholníkov s rovnakým obsahom: Napr. trojuholník AMT má stranu $|AM| = \frac{1}{2}c$ a jeho výška na stranu AM má zrejme veľkosť $\frac{1}{3}v_c$, takže $S_{AMT} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{3}v_c = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}c \cdot v_c = \frac{1}{6}S_{ABC}$ a analogicky to platí aj pre zvyšných päť trojuholníkov.

Úloha určiť najväčší možný obsah trojuholníka ABC je teda ekvivalentná s úlohou určiť najväčší možný obsah jedného zo šiestich menších trojuholníkov – výsledok stačí vynásobiť šiestimi.



Obr. 1

Uvažujme napríklad trojuholník ATL (obr. 1). Pre jeho dve strany platí

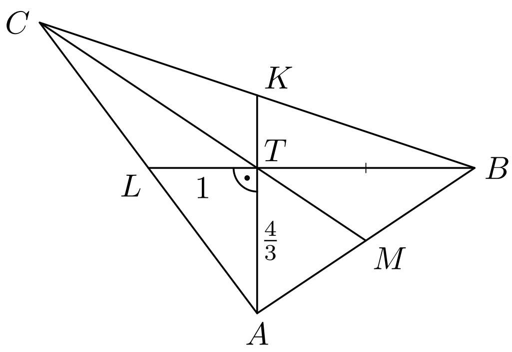
$$|AT| = \frac{2}{3}t_a \leqq \frac{4}{3}, \qquad |TL| = \frac{1}{3}t_b \leqq 1.$$

Preto pre jeho obsah dostávame

$$S_{ATL} = \frac{1}{2}|AT| \cdot |TL| \cdot \sin|\measuredangle ATL| \leqq \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 1 \cdot \sin|\measuredangle ATL| = \frac{2}{3}\sin|\measuredangle ATL| \leqq \frac{2}{3}.$$

Tým sme dokázali, že obsah trojuholníka ABC, ktorého ťažnice spĺňajú zadané nerovnosti, nemôže byť väčší ako $6 \cdot \frac{2}{3} = 4$. Pritom rovnosť $S_{ATL} = \frac{2}{3}$ (t. j. $S_{ABC} = 4$) nastane len vtedy, keď $t_a = 2$, $t_b = 3$ a $|\measuredangle ATL| = 90°$.[1]

Trojuholník ABC s takýmito vlastnosťami vieme ľahko „zrekonštruovať“: Najskôr narysujeme pravouhlý trojuholník ATL, v ktorom poznáme dĺžky oboch odvesien $|AT| = \frac{4}{3}$, $|TL| = 1$ a následne zostrojíme bod C ako obraz bodu A v stredovej súmernosti so stredom L a bod B ako obraz bodu L v rovnoľahlosti so stredom T a koeficientom -2 (obr. 2). Stačí už len overiť, že v takomto trojuholníku ABC platí $t_c \leqq 4$.



Obr. 2

Dĺžku t_c možno vypočítať rôznymi spôsobmi. Napríklad v pravouhlom trojuholníku ABT má prepona AB podľa Pytagorovej vety dĺžku

$$|AB| = \sqrt{|AT|^2 + |TB|^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + 4} = \sqrt{\frac{52}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{13},$$

takže veľkosť polomeru Tálesovej kružnice nad priemerom AB je

$$|MT| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{3}\sqrt{13}.$$

Odtiaľ $t_c = 3|MT| = \sqrt{13} < 4$.[2]

Odpoveď. Najväčší možný obsah trojuholníka ABC je 4.

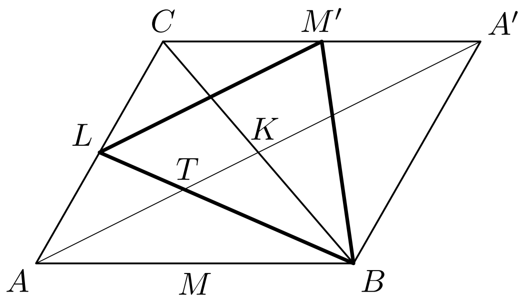
[1] Rovnaký výsledok vieme ľahko dostať aj bez použitia funkcie sínus: Pre výšku v na stranu AT v trojuholníku ATL zrejme platí $v \leqq |TL|$, takže $S_{ATL} = \frac{1}{2}v|AT| \leqq \frac{1}{2}|TL||AT|$, pričom rovnosť platí, keď $AT \perp TL$.

[2] Ak si nevšimneme Tálesovu kružnicu nad AB, môžeme postupovať tak, že aj z pravouhlých trojuholníkov ATL a BTK dopočítame prepony, ktoré sú polovicami strán b, a trojuholníka ABC: $\frac{1}{2}b = \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = \frac{5}{3}$, $\frac{1}{2}a = \sqrt{4 + \frac{4}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{10}$. Teda $a = \frac{4}{3}\sqrt{10}$, $b = \frac{10}{3}$, $c = \frac{2}{3}\sqrt{13}$ a na výpočet ťažnice môžeme použiť známy vzorec $t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

Iné riešenie. Obsah trojuholníka ABC možno vypočítať podľa vzorca

$$S_{ABC} = \frac{1}{3}\sqrt{2(t_a^2t_b^2 + t_b^2t_c^2 + t_c^2t_a^2) - (t_a^4 + t_b^4 + t_c^4)}. \qquad (1)$$

Tento vzorec možno ľahko odvodiť nasledovnou úvahou: Ak zobrazíme trojuholník ABC v stredovej súmernosti so stredom K (pri označení bodov ako v prvom riešení) a obrazy bodov M, A označíme M', A', tak trojuholník $BM'L$ má zrejme dĺžky strán rovné t_a, t_b, t_c (obr. 3). Pritom jeho obsah tvorí $\frac{3}{8}$ obsahu rovnobežníka $ABA'C$, čiže $\frac{3}{4}$ obsahu trojuholníka ABC. Takže podľa Herónovho vzorca máme $S_{ABC} = \frac{4}{3}S_{BM'L} = \frac{4}{3}\sqrt{u(u-t_a)(u-t_b)(u-t_c)}$, pričom $u = \frac{1}{2}(t_a + t_b + t_c)$, a po úprave dostaneme (1).



Obr. 3

Označme $t_a^2 = x$, $t_b^2 = y$, $t_c^2 = z$. Výraz na pravej strane (1) má najväčšiu hodnotu vtedy, keď v ňom má najväčšiu hodnotu výraz pod odmocninou. Zabudnime teda na geometrický význam vzorca a hľadajme najväčšiu možnú hodnotu výrazu

$$V = 2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2)$$

pri podmienkach $0 \leqq x \leqq 4$, $0 \leqq y \leqq 9$, $0 \leqq z \leqq 16$.

Ak zvolíme hodnoty x, y pevné, výraz V je kvadratický v premennej z. Úpravou na štvorec dostaneme

$$V = -\big(z - (x+y)\big)^2 + 4xy \leqq 4xy \leqq 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144.$$

Rovnosť pritom nastane pre $x = 4$, $y = 9$ a $z = x + y = 13$. Našli sme teda najväčšiu možnú hodnotu výrazu V pri stanovených podmienkach. Keď tento výsledok dosadíme do (1), obdržíme

$$S_{ABC} = \frac{1}{3}\sqrt{V} \leqq \frac{1}{3}\sqrt{144} = 4.$$

Rovnosť $S_{ABC} = 4$ je splnená pre trojuholník s ťažnicami $t_a = \sqrt{4} = 2$, $t_b = \sqrt{9} = 3$ a $t_c = \sqrt{13} < 4$. Trojuholník s takýmito dĺžkami ťažníc naozaj existuje – uvedené dĺžky totiž spĺňajú trojuholníkové nerovnosti $(2 + 3 > \sqrt{13})$, takže vieme zostrojiť trojuholník $BM'L$ z obr. 3 ($|BM'| = t_c = \sqrt{13}$, $|M'L| = t_a = 2$, $|LB| = t_b = 3$) a následne dorysovať trojuholník ABC (bod K je ťažiskom trojuholníka $BM'L$, vrchol C je obrazom B v stredovej súmernosti podľa K, vrchol A je obrazom C v stredovej súmernosti podľa L).

3. *Dokážte, že medzi ľubovoľnými 101 reálnymi číslami existujú dve čísla u a v, pre ktoré platí*

$$100\,|u-v|\cdot|1-uv| \leqq (1+u^2)(1+v^2).$$

(*Pavel Calábek*)

Riešenie. Ekvivalentnými úpravami nerovnosti zo zadania (s využitím toho, že výraz $1+x^2$ je kladný pre každé $x \in \mathbb{R}$) dostaneme

$$\begin{aligned} 100\,|(u-v)(1-uv)| &\leqq (1+u^2)(1+v^2), \\ 100\,\bigl|u-v-u^2v+uv^2\bigr| &\leqq (1+u^2)(1+v^2), \\ \bigl|u(1+v^2)-v(1+u^2)\bigr| &\leqq \frac{1}{100}(1+u^2)(1+v^2), \\ \left|\frac{u}{1+u^2}-\frac{v}{1+v^2}\right| &\leqq \frac{1}{100}. \end{aligned} \tag{1}$$

Všetky hodnoty funkcie

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

ležia v intervale $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, pretože pre každé reálne číslo x platí

$$\begin{aligned} (1-x)^2 &\geqq 0, \\ 1+x^2 &\geqq 2x, \\ \frac{1}{2} &\geqq \frac{x}{1+x^2} \end{aligned} \qquad \text{a} \qquad \begin{aligned} (1+x)^2 &\geqq 0, \\ 1+x^2 &\geqq -2x, \\ -\frac{1}{2} &\leqq \frac{x}{1+x^2}. \end{aligned}$$

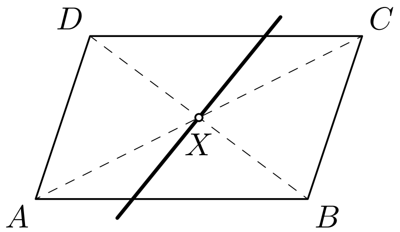
Rozdeľme interval $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ s dĺžkou 1 rovnomerne na sto malých intervalov s dĺžkou $\frac{1}{100}$. Podľa Dirichletovho princípu medzi ľubovoľnými 101 číslami nájdeme dve čísla u, v také, že $f(u)$, $f(v)$ ležia v tom istom malom intervale. Pre túto dvojicu zrejme platí $|f(u)-f(v)| \leqq \frac{1}{100}$, čo je presne nerovnosť (1), ktorá je ekvivalentná so zadanou nerovnosťou.

4. *Vnútri rovnobežníka $ABCD$ je daný bod X. Zostrojte priamku, ktorá prechádza bodom X a rozdeľuje daný rovnobežník na dve časti, ktorých obsahy sa navzájom líšia čo najviac.* (*Vojtech Bálint*)

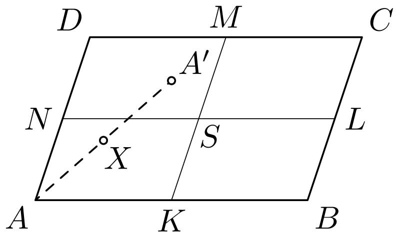
Riešenie. Keďže súčet obsahov oboch častí, na ktoré priamka delí rovnobežník $ABCD$, je stále rovnaký, líšiť sa budú čo najviac práve vtedy, keď menší z obsahov bude najmenší možný. Riešenie začneme pozorovaním, že ak bod X leží v strede rovnobežníka $ABCD$, tak každá priamka, ktorá ním prechádza, delí rovnobežník na dve časti s rovnakým obsahom. Obe časti sú totiž v takom prípade zhodné – jedna sa zobrazí na druhú v stredovej súmernosti podľa stredu X (obr. 4).

Uvedený fakt využijeme aj pri všeobecnej polohe bodu X. Predpokladajme, že bod A', ktorý je obrazom bodu A v stredovej súmernosti podľa X, leží vnútri rovnobežníka $ABCD$. Ak označíme K, L, M, N postupne stredy strán AB, BC, CD, DA a S

stred rovnobežníka $ABCD$, tak opísaná situácia nastane práve vtedy, keď X leží vnútri rovnobežníka $AKSN$ (obr. 5).

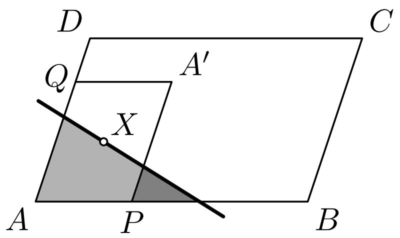


Obr. 4

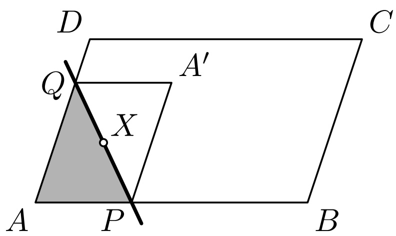


Obr. 5

Bodom A' veďme rovnobežky so stranami rovnobežníka a ich priesečníky so stranami AB a AD označme P a Q. Štvoruholník $APA'Q$ je zrejme rovnobežník a bod X je jeho stredom. Preto každá priamka prechádzajúca cez X rozdeľuje $APA'Q$ na dva útvary s rovnakým obsahom. Každý z týchto dvoch útvarov pritom patrí do inej časti rovnobežníka $ABCD$ (obr. 6a), takže žiadna z dvoch častí rovnobežníka $ABCD$ nemôže mať obsah menší ako polovica obsahu rovnobežníka $APA'Q$. Najmenší obsah menšej časti dosiahneme, keď okrem útvaru pochádzajúceho z rovnobežníka $APA'Q$ nebude časť obsahovať nič iné, čo je možné len v prípade, že deliaca priamka je totožná s priamkou PQ (obr. 6b).



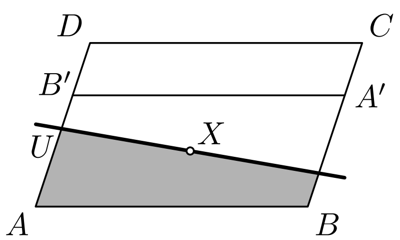
Obr. 6a



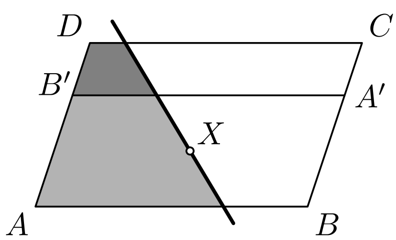
Obr. 6b

Ak bod X leží vnútri rovnobežníka $KBLS$, $SLCM$, resp. $NSMD$ (obr. 5), deliacu priamku zostrojíme obdobným postupom: Pomocou obrazu bodu B, C resp. D v stredovej súmernosti podľa X zostrojíme menší rovnobežník, ktorý leží celý vnútri rovnobežníka $ABCD$, má stred X a dve jeho strany ležia na stranách pôvodného rovnobežníka. Rozdeľujúcou priamkou musí byť uhlopriečka menšieho rovnobežníka oddeľujúca jeho polovicu od zvyšku rovnobežníka $ABCD$.

Ostáva vyšetriť prípad, keď X leží vnútri jednej z úsečiek KM, NL (mimo stredu rovnobežníka $ABCD$). Aj v tejto situácii vieme zostrojiť menší rovnobežník, ktorý celý leží v rovnobežníku $ABCD$, bod X je jeho stredom a strany (tentoraz až tri) má na stranách pôvodného rovnobežníka.



Obr. 7a



Obr. 7b

Ak X leží vnútri úsečky KS, tak takým rovnobežníkom je $ABA'B'$, pričom A', B' sú obrazy bodov A, B v stredovej súmernosti podľa X. Aj v tomto prípade musíme deliacu priamku cez X viesť tak, aby jedna z častí rovnobežníka $ABCD$ neobsahovala okrem útvaru pochádzajúceho z rovnobežníka $ABA'B'$ nič iné. Je zrejmé, že vyhovujúcou bude práve každá priamka UX, kde U je ľubovoľný bod úsečky AB' (obr. 7a, b).

Analogicky nájdeme deliace priamky v prípade, že X leží vnútri niektorej z úsečiek SM, NS či SL.

Záver. Ak X je stredom rovnobežníka $ABCD$, riešením je ľubovoľná priamka prechádzajúca cez X. Ak X leží mimo úsečiek KM, NL, riešením je jediná priamka. Ak X leží vnútri niektorej z úsečiek KS, SM, NS, SL, riešením je nekonečne veľa priamok. V každom z týchto prípadov je konštrukcia zrejmá z predošlých úvah.

---

5. *V skupine 90 detí má každé aspoň 30 kamarátov (kamarátstvo je vzájomné). Dokážte, že ich možno rozdeliť do troch 30-členných skupín tak, aby každé dieťa malo vo svojej skupine aspoň jedného kamaráta.* (*Ján Mazák*)

Riešenie. Rozdelenie vyhovujúce zadaniu priamo neskonštruujeme, iba dokážeme, že také rozdelenie existuje. Všetkých možných rozdelení 90 detí na tri 30-členné skupiny (pokiaľ nezáleží na poradí skupín) je dokopy

$$V = \binom{90}{30} \cdot \binom{60}{30} \cdot \frac{1}{3!},$$

pretože každé také rozdelenie môžeme vytvoriť tak, že najskôr vyberieme zo všetkých detí jednu 30-člennú skupinu a potom zo zvyšných 60 detí vyberieme druhú 30-člennú skupinu. Tretia skupina bude tvorená deťmi, ktoré ostali (členom 3! treba výsledný súčin prirodzene vydeliť, keďže každé rozdelenie sme započítali pre každé možné poradie troch skupín).

Rozdelenie nazveme *zlé kvôli dieťaťu A*, ak pri ňom dieťa A nemá vo svojej skupine žiadneho kamaráta. Zaoberajme sa tým, koľko je všetkých zlých rozdelení (teda takých, ktoré nevyhovujú zadaniu), ich počet označme Z. Stačí, ak ukážeme, že zlých rozdelení je menej ako všetkých, t. j. $Z < V$.

Skúmajme, aký je počet rozdelení, ktoré sú zlé kvôli A – ich počet označme Z_A. Ak A má medzi všetkými n kamarátov (čiže má $89 - n$ „nekamarátov“), tak existuje[3]

$$\binom{89-n}{29}$$

30-členných skupín, v ktorých je A spoločne s ďalšími 29 deťmi, z ktorých ani jedno nie je jeho kamarát. Pre každú takúto skupinu vieme zvyšných 60 detí rozdeliť

$$\binom{60}{30} \cdot \frac{1}{2}$$

spôsobmi na dve 30-členné skupiny (stále neberieme ohľad na poradie skupín). Takže počet rozdelení zlých kvôli A je

$$Z_A = \binom{89-n}{29} \cdot \binom{60}{30} \cdot \frac{1}{2} \leqq \binom{59}{29} \cdot \binom{60}{30} \cdot \frac{1}{2} \qquad (1)$$

[3] V prípade, že $n > 60$, tak prirodzene neexistuje žiadne rozdelenie zlé kvôli A. Aby sme sa vyhli rozoberaniu osobitných prípadov, dodefinujeme, tak ako je zvykom, $\binom{k}{l} = 0$ v prípade, že $k < l$.

(v nerovnosti sme využili zadané ohraničenie $n \geqq 30$, čiže $89 - n \leqq 59$ – zrejme z čím väčšej množiny 29 prvkov vyberáme, tým viac kombinácií dostaneme).

Celkový počet zlých rozdelení určite nie je väčší ako súčet počtov zlých rozdelení pre jednotlivé deti (každé zlé rozdelenie je totiž zlé kvôli jednému alebo viacerým deťom). Keďže detí je 90, podľa (1) máme

$$Z \leqq 90 \cdot \binom{59}{29} \cdot \binom{60}{30} \cdot \frac{1}{2}.$$

Na dôkaz nerovnosti $Z < V$ tak stačí dokázať nerovnosť

$$90 \cdot \binom{59}{29} \cdot \binom{60}{30} \cdot \frac{1}{2} < \binom{90}{30} \cdot \binom{60}{30} \cdot \frac{1}{3!}, \tag{2}$$

ktorú ekvivalentne upravíme:

$$45 \cdot \binom{59}{29} < \binom{90}{30} \cdot \frac{1}{6},$$

$$6 \cdot 45 \cdot \frac{59!}{29! \cdot 30!} < \frac{90!}{30! \cdot 60!},$$

$$6 \cdot 45 \cdot 59 \cdot 58 \cdot \ldots \cdot 30 < 90 \cdot 89 \cdot \ldots \cdot 61,$$

$$6 \cdot 45 < \frac{90}{59} \cdot \frac{89}{58} \cdot \ldots \cdot \frac{61}{30}. \tag{3}$$

Každý z tridsiatich zlomkov na pravej strane poslednej nerovnosti je zrejme väčší ako 1,5. Preto pravá strana je väčšia ako $1{,}5^{30} = 2{,}25^{15} > 2^{15} > 270 = 6 \cdot 45$. Takže nerovnosť (3) a teda aj (2) platí, čo znamená, že existuje rozdelenie, ktoré nie je zlé.

---

6. *V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc*

$$\begin{aligned} x^4 + y^2 + 4 &= 5yz, \\ y^4 + z^2 + 4 &= 5zx, \\ z^4 + x^2 + 4 &= 5xy. \end{aligned}$$

(*Jaroslav Švrček*)

Riešenie. Najskôr odhadneme ľavú stranu prvej rovnice danej sústavy pomocou nerovnosti $4x^2 \leqq x^4 + 4$, ktorá je splnená pre ľubovoľné reálne číslo x, pretože je ekvivalentná s nerovnosťou $0 \leqq (x^2 - 2)^2$. Rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď $x^2 = 2$, t. j. práve vtedy, keď $x = \sqrt{2}$ alebo $x = -\sqrt{2}$.

Dostaneme tak

$$4x^2 + y^2 \leqq x^4 + y^2 + 4 = 5yz.$$

Analogicky odhadneme aj ľavé strany zvyšných dvoch rovníc sústavy. Obdržíme tak trojicu nerovníc

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 &\leqq 5yz, \\ 4y^2 + z^2 &\leqq 5zx, \\ 4z^2 + x^2 &\leqq 5xy. \end{aligned} \tag{1}$$

Ich súčtom dostaneme po jednoduchej úprave nerovnicu

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq xy + yz + zy,$$

ktorú ekvivalentne upravíme na tvar

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \leqq 0. \tag{2}$$

Súčet druhých mocnín nemôže byť záporný. Preto v nerovnici (2) nutne nastáva rovnosť, t. j. platí $x = y = z$. Rovnosť musí ale platiť tiež v každej nerovnici v (1). Odtiaľ vyplýva

$$x = y = z = \sqrt{2} \quad \text{alebo} \quad x = y = z = -\sqrt{2}.$$

Skúškou sa ľahko presvedčíme, že obe nájdené trojice danej sústave vyhovujú.

Záver. Daná sústava rovníc má v obore reálnych čísel práve dve riešenia, sú to trojice $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ a $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Iné riešenie. Po substitúcii $x = \sqrt{2}a$, $y = \sqrt{2}b$, $z = \sqrt{2}c$ (ktorú prirodzene urobíme, aby sústava mala triviálne riešenie $a = b = c = \pm 1$) riešime sústavu

$$\begin{aligned} 4a^4 + 2b^2 + 4 &= 10bc, \\ 4b^4 + 2c^2 + 4 &= 10ca, \\ 4c^4 + 2a^2 + 4 &= 10ab. \end{aligned} \tag{3}$$

Pritom podľa nerovnosti medzi váženým aritmetickým a geometrickým priemerom (nezáporných) čísel a^4, b^4, a^2, b^2, 1 máme

$$\frac{2a^4 + 2b^4 + a^2 + b^2 + 4}{10} \geqq \sqrt[10]{a^{10}b^{10}} = |ab| \geqq ab,$$

teda $2a^4 + 2b^4 + a^2 + b^2 + 4 \geqq 10ab$. Sčítaním tejto nerovnosti s dvoma nerovnosťami, ktoré z nej získame cyklickou zámenou premenných, dostaneme, že súčet ľavých strán v (3) je väčší alebo rovný súčtu pravých strán v (3), pričom rovnosť nastane jedine ak nastane v použitých AG-nerovnostiach, teda keď $a^2 = b^2 = c^2 = 1$. Pritom a, b, c musia mať totožné znamienka, aby platila rovnosť v nerovnosti $|ab| \geqq ab$ a v podobných nerovnostiach s premennou c. Teda jediným riešením sústavy (3) sú trojice $(1, 1, 1)$ a $(-1, -1, -1)$, ktorým zodpovedajú rovnaké trojice (x, y, z), aké sme našli v prvom riešení (a urobili pre ne skúšku).