
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Zadania úloh 1. časti celoštátneho kola kategórie A

1 Nech a, b, c sú kladné celé čísla také, že jedna z hodnôt

$$D(a, b) \cdot n(b, c), \quad D(b, c) \cdot n(c, a), \quad D(c, a) \cdot n(a, b)$$

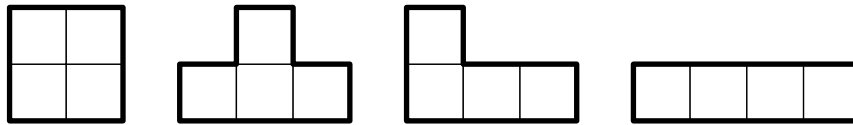
sa rovná súčinu zvyšných dvoch. Dokážte, že niektoré z čísel a, b, c je násobkom iného z nich. ($D(x, y)$, resp. $n(x, y)$ označuje najväčší spoločný deliteľ, resp. najmenší spoločný násobok kladných celých čísel x, y .)

2 Nech vnútorný bod P konvexného štvoruholníka $ABCD$ je taký, že

$$|\sphericalangle PAD| = |\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle PCB| = |\sphericalangle CPD|.$$

Nech O je stred kružnice opísanej trojuholníku CPD . Dokážte, že $|OA| = |OB|$.

3 Určte najväčšie prirodzené číslo n také, že ľubovoľnú sadu n tetramín, z ktorých každé je jedného zo štyroch tvarov na obrázku, možno bez prekrývania umiestniť do tabuľky 20×20 tak, že každé tetramino pokrýva práve štyri políčka tabuľky. Jednotlivé tetraminá je dovolené ľubovoľne otáčať a preklápať.



1. časť celoštátneho kola MO kategórie A sa koná v **pondelok 18. marca 2024** od **8:30** do **13:00**. Súťažiaci teda majú na riešenie úloh 4,5 hodiny čistého času.

Za každú úlohu môže súťažiaci získať 7 bodov.

Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály.

Vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Zadania úloh 2. časti celoštátneho kola kategórie A

4 Na párty sa zišlo 10 chlapcov a 10 dievčat. Každému chlapcovi sa páči iný kladný počet dievčat. Každému dievčaťu sa páči iný kladný počet chlapcov. Určte najväčšie nezáporné celé číslo n také, že vždy je možné utvoriť aspoň n disjunktných párov, v ktorých sa obom páči ten druhý.

5 Nech $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel taká, že ak k je nezáporné celé číslo, tak

$$a_{k+1} = 3a_k - [2a_k] - [a_k].$$

Určte všetky kladné celé čísla n také, že ak $a_0 = 1/n$, tak táto postupnosť je od istého člena konštantná.

(Pod $[x]$ rozumieme najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje číslo x .)

6 Nájdite všetky pravouhlé trojuholníky s celočíselnými dĺžkami strán, do ktorých sa dajú vpísať dve zhodné kružnice s prvočíselným polomerom také, že majú vonkajší dotyk, obe sa dotýkajú prepony a každá z ich sa dotýka inej odvesny.

2. časť celoštátneho kola MO kategórie A sa koná v **utorok 19. marca 2024** od **8:30** do **13:00**. Súťažiaci teda majú na riešenie úloh 4,5 hodiny čistého času.

Za každú úlohu môže súťažiaci získať 7 bodov.

Počas súťaže nie je dovolené použiť kalkulačky ani žiadne iné elektronické prístroje a žiadne písomné materiály.

Vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
