MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Riešenia úloh 1. dňa celoštátneho kola kategórie A

1 Nech a, b, c sú kladné celé čísla také, že jedna z hodnôt

$$\mathrm{D}(a,b)\cdot\mathrm{n}(b,c),\qquad \mathrm{D}(b,c)\cdot\mathrm{n}(c,a),\qquad \mathrm{D}(c,a)\cdot\mathrm{n}(a,b)$$

sa rovná súčinu zvyšných dvoch. Dokážte, že niektoré z čísel a, b, c je násobkom iného z nich.

($\mathrm{D}(x,y)$, resp. $\mathrm{n}(x,y)$ označuje najväčší spoločný deliteľ, resp. najmenší spoločný násobok kladných celých čísel x, y.)

(Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec)

Riešenie 1:

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že platí napríklad

$$\mathrm{D}(a,b)\cdot\mathrm{n}(b,c)=(\mathrm{D}(b,c)\cdot\mathrm{n}(c,a))\cdot(\mathrm{D}(c,a)\cdot\mathrm{n}(a,b))=s,$$

pričom s je vhodné kladné celé číslo. Použitím známeho vzťahu $\mathrm{D}(x,y)\cdot\mathrm{n}(x,y)=xy$, ktorý platí pre všetky kladné celé čísla x a y, dostaneme

$$\begin{gathered}(abc)^2\\ =(ab)\cdot(bc)\cdot(ca)=(\mathrm{D}(a,b)\cdot\mathrm{n}(a,b))\cdot(\mathrm{D}(b,c)\cdot\mathrm{n}(b,c))\cdot(\mathrm{D}(c,a)\cdot\mathrm{n}(c,a))=\\ =(\mathrm{D}(a,b)\cdot\mathrm{n}(b,c))\cdot(\mathrm{D}(b,c)\cdot\mathrm{n}(c,a)\cdot\mathrm{D}(c,a)\cdot\mathrm{n}(a,b))=s\cdot s=s^2,\end{gathered}$$

a teda po odmocnení $abc=s$. Platí

$$\mathrm{D}(a,b)\cdot\mathrm{n}(b,c)=s=a\cdot(bc)=a\cdot\mathrm{D}(b,c)\cdot\mathrm{n}(b,c),$$

odkiaľ po vydelení $\mathrm{n}(b,c)$ dostávame $\mathrm{D}(a,b)=a\cdot\mathrm{D}(b,c)$. Z toho $a\mid\mathrm{D}(a,b)\mid b$, a teda b je násobkom a.

Riešenie 2:

Označme $v_p(x)$ exponent prvočísla p v prvočíselnom rozklade daného kladného celého čísla x. Predpokladajme opäť, že platí rovnosť

$$\mathrm{D}(a,b)\cdot\mathrm{n}(b,c)=(\mathrm{D}(b,c)\cdot\mathrm{n}(c,a))\cdot(\mathrm{D}(c,a)\cdot\mathrm{n}(a,b))\,.$$

Potom pre každé prvočíslo p máme

$$v_p\left(\mathrm{D}(a,b)\cdot\mathrm{n}(b,c)\right)=v_p\left(\mathrm{D}(b,c)\cdot\mathrm{n}(c,a)\cdot\mathrm{D}(c,a)\cdot\mathrm{n}(a,b)\right).$$

Ak pri pevnom p položíme $\alpha=v_p(a)$, $\beta=v_p(b)$ a $\gamma=v_p(c)$, môžeme zapísanú rovnosť opakovaným použitím pravidla $v_p(xy)=v_p(x)+v_p(y)$ a známych vzorcov

$$v_p(\mathrm{D}(x,y))=\min(v_p(x),v_p(y)),$$

$$v_p(\mathrm{n}(x,y))=\max(v_p(x),v_p(y))$$

prepísať ako

$$\min(\alpha,\beta)+\max(\beta,\gamma)=\min(\beta,\gamma)+(\max(\gamma,\alpha)+\min(\gamma,\alpha))+\max(\alpha,\beta)=\min(\beta,\gamma)+(\alpha+\gamma)+\max(\alpha,\beta).$$

Ak by platilo $\alpha>\beta$, získali by sme po sčítaní zrejmých nerovností $\min(\alpha,\beta)<\max(\alpha,\beta)$, $\max(\beta,\gamma)<\alpha+\gamma$ a $0\le\min(\beta,\gamma)$ spor s odvodenou rovnosťou. Preto platí $\alpha\le\beta$.

Ukázali sme tak, že pre ľubovoľné prvočíslo p platí $v_p(a)\le v_p(b)$, odkiaľ už vyplýva, že b je násobkom a.

2 Nech vnútorný bod P konvexného štvoruholníka $ABCD$ je taký, že

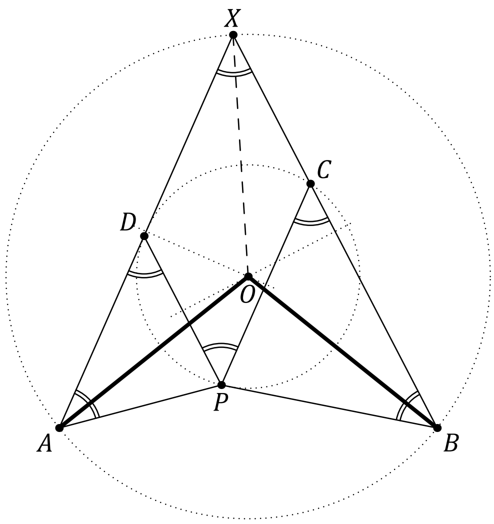
$$|\sphericalangle PAD|=|\sphericalangle ADP|=|\sphericalangle CBP|=|\sphericalangle PCB|=|\sphericalangle CPD|\,.$$

Nech O je stred kružnice opísanej trojuholníku CPD. Dokážte, že $|OA|=|OB|$.

(Patrik Bak)

Riešenie 1:

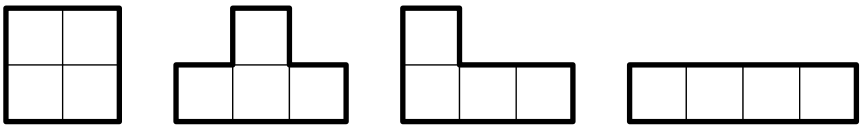
Zo zadaných rovností striedavých uhlov vyplýva $PC\parallel AD$ a $PD\parallel BC$. Keďže priamky PC a PD sú rôzne, a teda rôznobežné, platí, že aj priamky AD a BC sú rôznobežné. Označme X ich priesečník. Štvoruholník $PCXD$ je potom rovnobežník, a preto platí aj $|\sphericalangle CPD|=|\sphericalangle CXD|$.



Platí $AX \parallel CP$ a $|\sphericalangle PAX| = |\sphericalangle CXA|$, preto je štvoruholník $AXCP$ rovnoramenný lichobežník. Os jeho základne CP, na ktorej leží aj bod O zo zadania, je teda zhodná s osou druhej základne AX. Platí tak $|OA| = |OX|$. Analogicky použitím rovnoramenného lichobežníka $BXDP$ získame rovnosť $|OB| = |OX|$. Dokopy dostávame $|OA| = |OX| = |OB|$.

---

3 Určte najväčšie prirodzené číslo n také, že ľubovoľnú sadu n tetramín, z ktorých každé je jedného zo štyroch tvarov na obrázku, možno bez prekrývania umiestniť do tabuľky 20×20 tak, že každé tetramino pokrýva práve štyri políčka tabuľky. Jednotlivé tetraminá je dovolené ľubovoľne otáčať a preklápať.



(Josef Tkadlec)

Riešenie:

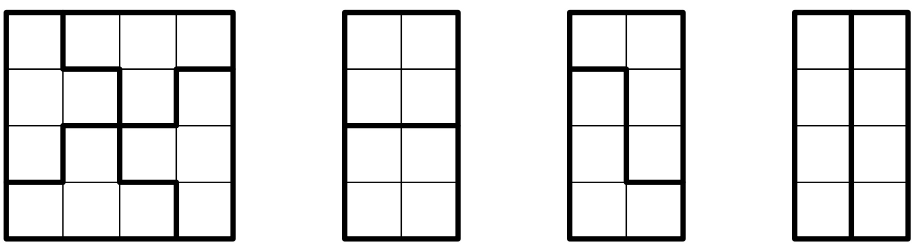
Typy tetramín zo zadania nazvime postupne `O`, `T`, `L` a `I`.

Ukážeme, že hľadané najväčšie číslo n je 99.

V prvej časti riešenia uvedieme príklad sady 100 tetramín, ktorú nie je možné do tabuľky 20×20 umiestniť vyhovujúcim spôsobom. Bude to potom zrejme znamenať, že žiadne prirodzené číslo n také, že $n \geq 100$, požadovanú vlastnosť nemá.

Zoberme sadu 100 tetramín zloženú z 99 tetramín typu `O` a jedného tetramina typu `T`. Ak zafarbíme tabuľku 20×20 ako šachovnicu, bude v nej rovnaký počet bielych aj čiernych políčok, konkrétne $20^2 : 2$ čiže 200. Ak potom umiestnime do tabuľky najprv akokoľvek našich 99 tetramín typu `O`, bude nimi pokrytých 198 bielych a 198 čiernych políčok, lebo každé z nich pokryje 2 biele a 2 čierne políčka. Bez pokrytia tak zostanú niektoré 2 biele a niektoré 2 čierne políčka, ktoré však nemožno pokryť zvyšným tetraminom typu `T` – jeho umiestnením totiž vždy pokryjeme 3 políčka rovnakej farby.

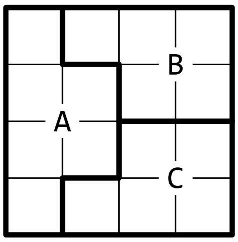
V druhej časti riešenia dokážeme, že číslo 99 požadovanú vlastnosť má. Popíšeme totiž postup, ako je možné ľubovoľnú sadu 99 tetramín do tabuľky 20×20 umiestniť vyhovujúcim spôsobom.

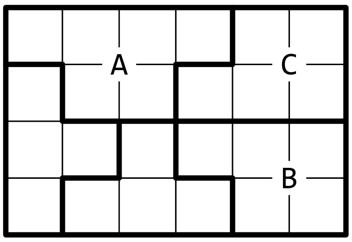


Z obrázka vidíme, ako štyrmi tetraminami typu `T` vyplniť štvorec 4×4 a ako každými dvoma tetraminami jedného z troch typov `O`, `L`, `I` vyplniť obdĺžnik 4×2. Všetky takéto štvorce a všetky takéto obdĺžniky, ktoré môžeme z danej sady 99 tetramín zostaviť, budeme potom do tabuľky postupne ukladať (najprv všetky štvorce, až potom obdĺžniky) po vrstvách výšky 4 riadkov. Keďže sú riadky tvorené 20 políčkami, čo je násobok 4, bude každá nová vrstva započatá, len ak je predchádzajúca vrstva vyplnená bezo zvyšku. Uvedomme si, že v okamihu, keď už žiadny obdĺžnik 4×2 na uloženie do tabuľky nemáme k dispozícii, platia nasledujúce skutočnosti:

- Sada všetkých zvyšných, t. j. doposiaľ neumiestnených tetramín, ktorú označíme $\mathcal{Z}$, je podmnožinou sady 1-krát O, 1-krát L, 1-krát I a 3-krát T. Pre počet k tetramín v sade $\mathcal{Z}$ tak platí $k \le 6$.
- $99 - k$ tetraminami v uložených štvorcoch a obdĺžnikoch sme pokryli celkovo $4(99 - k)$ čiže $400 - 4(k + 1)$ políčok tabuľky, nepokrytých tak zostalo $4(k + 1)$ jej políčok.
- Obdĺžnikmi a štvorcami sme postupne pokrývali vrstvy tabuľky s 80 políčkami bezo zvyškov, preto doposiaľ nepokryté políčka v počte $4(k + 1)$, ktorý je vďaka $k \le 6$ menší ako 80, tvoria časť poslednej vrstvy tabuľky, a to jej podtabuľku s rozmermi $4 \times (k + 1)$.
- Počet $99 - k$ tetramín v umiestnených štvorcoch a obdĺžnikoch je párne číslo, teda číslo $k \le 6$ je nepárne, a preto $k \in \{1, 3, 5\}$.

Zostáva nám tak umiestniť k tetramín tvoriacich sadu $\mathcal{Z}$ do tabuľky $4 \times (k + 1)$. Rozlíšime tri prípady podľa hodnoty k, pritom v prípadoch $k \in \{3, 5\}$ využijeme rozdelenie tabuľky $4 \times (k + 1)$ so zastúpením útvarov A, B a C, ktoré sú vykreslené na obrázkoch:





Uplatníme pritom tieto zrejmé poznatky: Tetramino ktoréhokoľvek typu možno umiestniť do tabuľky 4×2 aj do útvaru A, zatiaľ čo do útvarov B a C možno umiestniť tetramino každého z typov O, L, T.

- Prípad $k = 1$.

  Do príslušnej tabuľky 4×2 umiestnime to tetramino, ktoré tvorí celú sadu $\mathcal{Z}$.
- Prípad $k = 3$.

  Do útvaru A umiestnime jedno tetramino zo sady $\mathcal{Z}$, pritom dáme prednosť typu I, ak je zastúpený. Zvyšné dve tetraminá zo sady $\mathcal{Z}$ umiestnime po jednom do útvarov B a C, nech už sú ktoréhokoľvek typu O, L, T.
- Prípad $k = 5$.

  Sada $\mathcal{Z}$ potom obsahuje 2 alebo 3 tetraminá typu T. Dve z nich umiestnime podľa obrázka. Ostatné tri tetraminá zo sady $\mathcal{Z}$ umiestnime po jednom do útvarov A, B a C, pritom do útvaru A typ I, ak je v $\mathcal{Z}$ zastúpený.

Tým je aj druhá časť riešenia hotová.