MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Riešenia úloh 2. dňa celoštátneho kola kategórie A

4 Na párty sa zišlo 10 chlapcov a 10 dievčat. Každému chlapcovi sa páči iný kladný počet dievčat. Každému dievčaťu sa páči iný kladný počet chlapcov. Určte najväčšie nezáporné celé číslo n také, že vždy je možné utvoriť aspoň n disjunktných párov, v ktorých sa obom páči ten druhý.

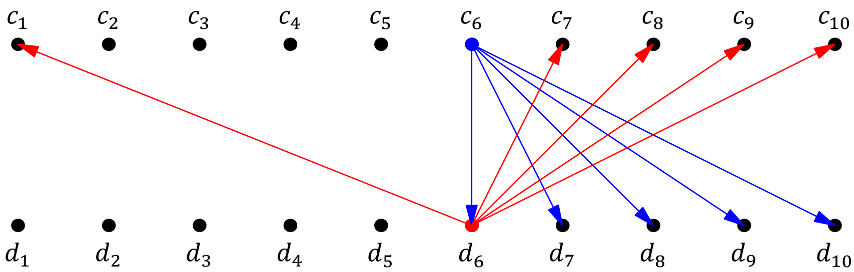
(Josef Tkadlec)

Riešenie:

Dokážeme, že hľadané najväčšie n je 1.

V prvej časti riešenia ukážeme, že jeden vyhovujúci pár je možné vždy utvoriť. Podľa zadania sú počty dievčat páčiacich sa jednotlivým chlapcom všetky čísla od 1 do 10 (v nejakom poradí). To isté platí aj pre počty chlapcov páčiacich sa jednotlivým dievčatám. Jednému chlapcovi sa tak páči všetkých 10 dievčat a jednému dievčaťu všetkých 10 chlapcov, takže tento chlapec a toto dievča tvoria vyhovujúci pár.

V druhej časti riešenia uvedieme príklad párty spĺňajúci podmienky zadania, pri ktorom neexistujú dva disjunktné páry s obojstrannou sympatiou. Chlapcov označme c_1, ..., c_{10} a dievčatá d_1, ..., d_{10}. Nech sa pre každé i z $\{1, \ldots, 10\}$ chlapcovi c_i páčia práve všetky dievčatá d_j, kde $i \le j \le 10$, a dievčaťu d_i práve chlapec c_1 a chlapci c_j, kde $i + 1 \le j \le 10$. (Na obrázku je situácia pre chlapca c_6 a tiež pre dievča d_6, šípky znamenajú sympatiu.)



Pre každé i z $\{1, \ldots, 10\}$ sa teda chlapcovi c_i páči práve i dievčat a dievčaťu práve i chlapcov, takže každému chlapcovi sa páči iný počet dievčat a každému dievčaťu iný počet chlapcov. Vo všetkých (10) pároch s obojstrannou sympatiou je zastúpený iba chlapec c_1, preto žiadne dva také páry nie sú disjunktné.

5 Nech $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel taká, že ak k je nezáporné celé číslo, tak

$$a_{k+1} = 3a_k - \lfloor 2a_k \rfloor - \lfloor a_k \rfloor .$$

Určte všetky kladné celé čísla n také, že ak $a_0 = 1/n$, tak táto postupnosť je od istého člena konštantná.

(Pod $\lfloor x \rfloor$ rozumieme najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje číslo x.)

(Jaromír Šimša)

Riešenie 1:

Nech f je funkcia taká, že $f(x) = 3x - \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor$. Postupnosť zo zadania je potom určená členom a_0 a pravidlom $a_{k+1} = f(a_k)$ pre každé nezáporné celé číslo k. Keďže $f(1) = f(0) = 0$ a $f(1/2) = 1/2$, táto postupnosť je od nejakého člena konštantná, ak je v nej prítomný člen 1 alebo 1/2.

Keďže pre x z intervalu $(0, 1/2)$ platí $f(x) = 3x$, je prítomnosť člena 1, resp. 1/2 v našej postupnosti zaručená, ak platí $a_0 = 1/3^c$, resp. $a_0 = 1/(2 \cdot 3^c)$, kde c je nejaké nezáporné celé číslo. Medzi hľadané kladné celé čísla n tak patria všetky takéto hodnoty 3^c a $2 \cdot 3^c$. Vo zvyšku riešenia ukážeme, že iné vyhovujúce n neexistujú.

Na to bude stačiť, keď pre každé vyhovujúce n nájdeme c s vlastnosťou $n \mid 2 \cdot 3^c$. Zafixujme teda jedno vyhovujúce n a okrem postupnosti $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ s počiatočným členom $1/n$ definujme novú postupnosť $(b_k)_{k=0}^{\infty}$ tak, že ak k je nezáporné celé číslo, tak $b_k = n \cdot a_k$. Potom $b_0 = 1$ a rekurentný vzťah $a_{k+1} = f(a_k)$ po vynásobení číslom n prejde na

$$b_{k+1} = 3b_k - n \left\lfloor \frac{2b_k}{n} \right\rfloor - n \left\lfloor \frac{b_k}{n} \right\rfloor .$$

Odtiaľ indukciou vyplýva, že každé číslo b_k je celé, a navyše platí $b_{k+1} \bmod n = (3b_k) \bmod n$, odkiaľ (opäť indukciou) $b_k \bmod n = 3^{k-1} \bmod n$ pre každé k.

Keďže n je vyhovujúce, postupnosť $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ je od nejakého člena konštantná, takže to isté platí aj pre postupnosť $(b_k)_{k=0}^{\infty}$. Pre isté c tak máme $b_{c+2} = b_{c+1}$, čo spolu s $b_{c+2} \bmod n = (3b_{c+1}) \bmod n$ vedie k $(2b_{c+1}) \bmod n = 0$. Dokopy s $b_{c+1} \bmod n = 3^c \bmod n$ už dostávame $(2 \cdot 3^c) \bmod n = 0$, čiže $n \mid 2 \cdot 3^c$.

Hľadané čísla n sú teda práve tvarov 3^c a $2 \cdot 3^c$, kde c je nezáporné celé číslo.

Riešenie 2:

Nech f je funkcia taká, že $f(t) = 3t - \lfloor 2t \rfloor - \lfloor t \rfloor$. Nájdeme dokonca všetky reálne čísla a_0, pre ktoré je postupnosť $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ taká, že pre každé nezáporné celé číslo k platí $a_{k+1} = f(a_k)$, od istého člena konštantná. To zrejme nastane práve vtedy, keď bude platiť $f(a_{k+1}) = a_{k+1}$ pre niektoré nezáporné celé číslo k, práve vtedy potom totiž budeme mať $a_i = a_{k+1}$ pre každé i, kde $i \geq k+1$.

Nech z je funkcia taká, že $z(t) = t - \lfloor t \rfloor$. (Hodnota $z(t)$ sa obvykle nazýva *zlomková časť* čísla t.) Táto funkcia je zrejme periodická s periódou 1 a jej hodnoty sú v intervale $[0, 1)$.

Potom pre každé t z $\mathbb{R}$ platí

$$f(t) = 3t - \lfloor 2t \rfloor - \lfloor t \rfloor = (2t - \lfloor 2t \rfloor) + (t - \lfloor t \rfloor) = z(2t) + z(t),$$

a teda

$$f(a_{k+1}) = a_{k+1} \Leftrightarrow z(2a_{k+1}) + z(a_{k+1}) = a_{k+1} \Leftrightarrow z(2a_{k+1}) = a_{k+1} - z(a_{k+1}) \Leftrightarrow z(2a_{k+1}) = \lfloor a_{k+1} \rfloor.$$

Keďže $z(2a_{k+1}) \in [0, 1)$ a $\lfloor a_{k+1} \rfloor \in \mathbb{Z}$, rovnosť $f(a_{k+1}) = a_{k+1}$ nastane práve vtedy, keď bude platiť $z(2a_{k+1}) = \lfloor a_{k+1} \rfloor = 0$, t. j. práve keď $a_{k+1} \in \{0, 1/2\}$.

Nájdeme tie čísla t z $\mathbb{R}$, pre ktoré $f(t) \in \{0, 1/2\}$. Keďže $f(t) = z(2t) + z(t)$ a funkcia z je periodická s periódou 1, aj funkcia f je periodická s periódou 1, takže pre každé t z $\mathbb{R}$ platí $f(t) = f(z(t))$. Rozoberme prípady:

- Ak $z(t) \in [0, 1/2)$, tak $2z(t) \in [0, 1)$, a teda

  $$f(t) = f(z(t)) = z(2z(t)) + z(z(t)) = 2z(t) + z(t) = 3z(t).$$

  Preto $f(t) = 0$ práve vtedy, keď $3z(t) = 0$, t. j. keď $z(t) = 0$, a $f(t) = 1/2$ práve vtedy, keď $3z(t) = 1/2$, t. j. keď $z(t) = 1/6$. Obe tieto hodnoty sú z intervalu $[0, 1/2)$.
- Ak $z(t) \in [1/2, 1)$, tak $2z(t) \in [1, 2)$, a teda

  $$f(t) = f(z(t)) = z(2z(t)) + z(z(t)) = (2z(t) - 1) + z(t) = 3z(t) - 1.$$

  Preto $f(t) = 0$ práve vtedy, keď $3z(t) - 1 = 0$, t. j. keď $3z(t) = 1$, t. j. keď $z(t) = 1/3$, a $f(t) = 1/2$ práve vtedy, keď $3z(t) - 1 = 1/2$, t. j. keď $3z(t) = 3/2$. t. j. keď $z(t) = 1/2$. Z intervalu $[1/2, 1)$ je len hodnota $1/2$.

Platí teda

$$f(t) \in \{0, 1/2\} \Leftrightarrow z(t) \in \{0, 1/6, 1/2\}.$$

Keďže funkcia f je periodická s periódou 1, pre ľubovoľné t z $\mathbb{R}$ a m z $\mathbb{Z}$ platí $f(t) = f(t+m)$. Odtiaľ pre každé pre každé x z $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(z(2x) + z(x)) = f(z(2x) + z(x) + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor x \rfloor) \\ &= f((z(2x) + \lfloor 2x \rfloor) + (x + \lfloor x \rfloor)) = f(2x + x) = f(3x), \end{aligned}$$

z čoho indukciou pre každé nezáporné celé číslo k dostávame $a_{k+1} = f\left(3^k a_0\right)$:

1° $a_{0+1} = a_1 = f(a_0) = f\left(3^0 a_0\right)$.

2° Ak $a_{k+1} = f\left(3^k a_0\right)$, tak $a_{k+2} = f(a_{k+1}) = f\left(f\left(3^k a_0\right)\right) = f\left(3 \cdot 3^k a_0\right) = f\left(3^{k+1} a_0\right)$.

Zhrnutím

$$f(a_{k+1}) = a_{k+1} \Leftrightarrow a_{k+1} \in \{0, 1/2\} \Leftrightarrow f\left(3^k a_0\right) \in \{0, 1/2\} \Leftrightarrow z(3^k a_0) \in \{0, 1/6, 1/3\},$$

a teda ekvivalentne

$$a_0 \in \left\{\frac{m}{3^k} : m, k \geq 0\right\} \cup \left\{\frac{6m+1}{2 \cdot 3^{k+1}} : m, k \geq 0\right\} \cup \left\{\frac{3m+1}{2 \cdot 3^k} : m, k \geq 0\right\}.$$

Druhá množina je pritom časťou tretej, takže ekvivalentne

$$a_0 \in \left\{\frac{m}{3^k} : m, k \geq 0\right\} \cup \left\{\frac{3m+1}{2 \cdot 3^k} : m, k \geq 0\right\}.$$

Prienik tejto množiny s množinou $\{1/n : n \geq 1\}$ je množina

$$\left\{\frac{1}{3^k} : k \geq 0\right\} \cup \left\{\frac{1}{2 \cdot 3^k} : k \geq 0\right\},$$

takže hľadané čísla n sú práve tvarov 3^k a $2 \cdot 3^k$, kde k je nezáporné celé číslo.

---

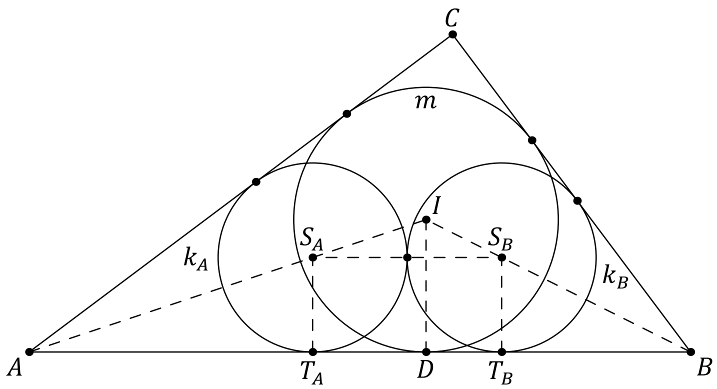
6 Nájdite všetky pravouhlé trojuholníky s celočíselnými dĺžkami strán, do ktorých sa dajú vpísať dve zhodné kružnice s prvočíselným polomerom také, že majú vonkajší dotyk, obe sa dotýkajú prepony a každá z nich sa dotýka inej odvesny.

(Jaromír Šimša)

Riešenie:

Ukážeme, že hľadaný trojuholník je jediný, má strany dĺžok 21, 28, 35 a dotyčné dve kružnice majú prvočíselný polomer 5.

Nech ABC je ľubovoľný pravouhlý trojuholník s preponou AB. Označme $a = |BC|$, $b = |AC|$ a $c = |AB|$. Zrejme existujú dve zhodné kružnice so všetkými dotykmi popísanými v zadaní. Označme ich k_A a k_B tak, aby sa k_A dotýkala strany AC a k_B strany BC. Ich stredy označme S_A, resp. S_B, ich spoločný polomer r a body ich dotyku s AB nech sú T_A, resp. T_B. Nech m je kružnica vpísaná trojuholníku ABC, jej stred označme I, polomer ϱ a nech D je bod jej dotyku s AB.



V rovnoľahlosti so stredom v bode A s koeficientom r/ϱ, ktorá zobrazí m na k_A, prejde bod D do bodu T_A. Platí tak $|AT_A| = |AD| \cdot r/\varrho$. Analogicky platí aj rovnosť $|BT_B| = |BD| \cdot r/\varrho$. Keďže z obdĺžnika $T_AT_BS_BS_A$ vyplýva $|T_AT_B| = |S_AS_B| = 2r$, dostávame

$$c = |AB| = |AT_A| + |T_AT_B| + |BT_B| = |AD| \cdot \frac{r}{\varrho} + 2r + |BD| \cdot \frac{r}{\varrho}$$

$$= 2r + (|AD| + |BD|) \cdot \frac{r}{\varrho} = 2r + |AB| \cdot \frac{r}{\varrho} = 2r + c \cdot \frac{r}{\varrho} = \frac{2r\varrho + cr}{\varrho} = r \cdot \frac{2\varrho + c}{\varrho},$$

odkiaľ

$$r = \frac{c\varrho}{2\varrho + c}.$$

Po dosadení zo známeho vzorca $\varrho = (a + b - c)/2$ dostávame

$$r = \frac{c \cdot (a + b - c)/2}{2 \cdot (a + b - c)/2 + c} = \frac{c(a + b - c)}{2(a + b - c) + 2c} = \frac{c(a + b - c)}{2(a + b)}.$$

Predpokladajme teraz, že dĺžky a, b, c sú kladné celé čísla a r je prvočíslo. Nech k je najväčší spoločný deliteľ čísel a, b, c, takže existujú kladné celé čísla d, e, f také, že $a = kd$, $b = ke$, $c = kf$. Podľa Pytagorovej vety

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

$$(kd)^2 + (ke)^2 = (kf)^2,$$

$$k^2d^2 + k^2e^2 = k^2f^2,$$

$$d^2 + e^2 = f^2,$$

takže d a e sodvesny a f prepona pravouhlého trojuholníka.

Ak nejaké kladné celé číslo delí dve z čísel d, e, f, z tohto vzťahu dostávame, že delí aj tretie, z nesúdeliteľnosti d, e, f preto dostávame, že tieto tri čísla po dvoch nesúdeliteľné. Čísla d a e teda nie sú obe párne. Nie sú však ani obe nepárne, lebo súčet štvorcov dvoch nepárnych čísel je párne číslo, ktoré nie je deliteľné 4, a teda to nie je štvorec. Čísla d a e majú preto rôznu paritu, takže f je nepárne. Potom je $d + e - f$ párne, takže číslo $\frac{d+e-f}{2}$ je celé a z trojuholníkovej nerovnosti kladné.

Potom platí

$$r = \frac{kf(kd + ke - kf)}{2(kd + ke)} = \frac{k}{d + e} \cdot f \cdot \frac{d + e - f}{2}.$$

Nech nejaké prvočíslo p delí $d + e$ aj f. Potom p delí aj $(d + e)^2$ čiže $d^2 + e^2 + 2de$, čo je $f^2 + de$, a keďže delí aj f^2, delí aj de. Vzhľadom na nesúdeliteľnosť d a e delí len jedno z nich, potom však nedelí $d + e$, čo je spor. Čísla $d + e$ a f sú teda nesúdeliteľné, a teda aj $d + e$ a $d + e - f$ sú nesúdeliteľné. To znamená, že $d + e$ delí k, a teda číslo $\frac{k}{d+e}$ je celé kladné.

Keďže r je prvočíslo, jedno z čísel $\frac{k}{d+e}$, f, $\frac{d+e-f}{2}$ je r a zvyšné dve sú 1. Keďže $f > d$ a $f > e$, platí

$$\frac{d + e - f}{2} < \frac{f + f - f}{2} = \frac{f}{2} < f,$$

takže nemôže platiť $f = 1$. Preto $f = r$ a $\frac{k}{d+e} = \frac{d+e-f}{2} = 1$, t. j. $k = d + e$ a $d + e - f = 2$, z čoho $k - f = 2$. Potom platí

$$k^2 = (d + e)^2 = d^2 + e^2 + 2de = f^2 + 2de = (k - 2)^2 + 2de,$$

z čoho

$$2de = k^2 - (k - 2)^2 = 4k - 4,$$

$$de = 2k - 2 = 2(d + e) - 2 = 2d + 2e - 2,$$

$$de - 2d - 2e + 4 = 2,$$

$$(d - 2)(e - 2) = 2,$$

takže vzhľadom na kladnosť d a e

$$\{d - 2, e - 2\} = \{1, 2\},$$

$$\{d, e\} = \{3, 4\}.$$

Z toho

$$r = f = d + e - 2 = 3 + 4 - 2 = 5,$$

$$k = f + 2 = 5 + 2 = 7,$$

takže

$$\{a, b\} = \{kd, ke\} = \{7 \cdot 3, 7 \cdot 4\} = \{21, 28\}$$

a

$$c = kf = 7 \cdot 5 = 35.$$

Tento trojuholník je podobný s pravouhlým trojuholníkom so stranami 3, 4, 5, je teda tiež pravouhlý. Potom naozaj platí

$$r = \frac{c(a + b - c)}{2(a + b)} = \frac{35 \cdot (21 + 28 - 35)}{2(21 + 28)} = \frac{35 \cdot 14}{2 \cdot 49} = 5 \in \mathbb{Z}.$$