MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z6

1 Kamaráti Jaro, Pavol a Rasťo hrali guľôčky. Jarovi sa veľmi nedarilo, takže mal po hre najmenej guľôčok zo všetkých. Chlapcom to bolo ľúto, preto dal Rasťo Jarovi polovicu všetkých svojich guľôčok a Pavol tretinu tých svojich. Teraz mal najviac guľôčok Jaro, a tak svojim dvom kamarátom vrátil každému sedem guľôčok. Po týchto výmenách mali všetci rovnako, a to po 25 guľôčok.

Koľko guľôčok mal po hre (pred výmenami) Jaro?

(Michaela Petrová)

Riešenie:

Úlohu môžeme výhodne riešiť odzadu:

- Pred druhým (posledným) kolom výmen mali Pavol a Rasťo o 7 guľôčok menej, zatiaľ čo Jaro o 14 guľôčok viac. Teda Pavol a Rasťo mali $25 - 7$ čiže 18 guľôčok, zatiaľ čo Jaro ich mal $25 + 14$ čiže 39.
- Pred prvým kolom výmen mal Rasťo dvojnásobok guľôčok (polovicu dal Jarovi, zostala mu teda polovica) a Pavol tri polovice guľôčok (tretinu dal Jarovi, ostali mu teda dve tretiny). Teda Rasťo mal $2 \cdot 18$ čiže 36 guľôčok a Pavol $\frac{3}{2} \cdot 18$ čiže 27 guľôčok.
- Počas prerozdeľovania bol celkový počet guľôčok stále rovnaký. Súčet po druhom, resp. prvom kole výmen bol $25 + 25 + 25$ čiže $18 + 18 + 39$ čiže $= 75$ guľôčok. Pred prvou výmenou (po hre) mal Rasťo 36 a Pavol 27 guľôčok. Teda po hre mal Jaro $75 - 36 - 27$ čiže 12 guľôčok.

Poznámka:

Znázornenie predchádzajúcich úvah, príp. kontrola výsledkov môže vyzerať takto:

stavy	Rasťo	Pavol	Jaro	výmeny
po 2. kole výmen	25	25	25	
		$\uparrow 7$	$\downarrow 7$	Jaro Pavlovi
	$\uparrow 7$		$\downarrow 7$	Jaro Rasťovi
po 1. kole výmen	18	18	39	
	$\downarrow 18$		$\uparrow 18$	Rasťo Jarovi
		$\downarrow 9$	$\uparrow 9$	Pavol Jarovi
po hre	36	27	12	

2 Karolína narysovala štvorec so stranou 6 cm. Na každej strane štvorca vyznačila modrou farbou dva body, ktorými rozdelila príslušnú stranu na tri zhodné časti. Potom zostrojila štvoruholník, ktorý mal všetky vrcholy modrej farby a ktorého žiadne dva vrcholy neležali na rovnakej strane štvorca.

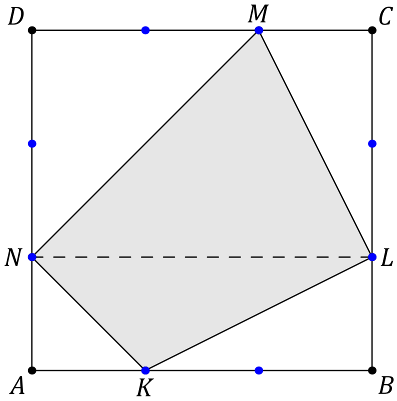
Aké obsahy štvoruholníkov mohla Karolína dostať? Nájdite všetky možnosti.

(Libuše Hozová)

Riešenie 1:

Štvoruholníky s rozličnými obsahmi možno rozlíšiť takto:

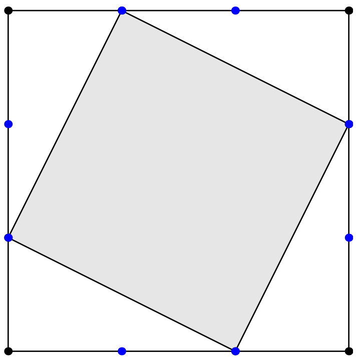
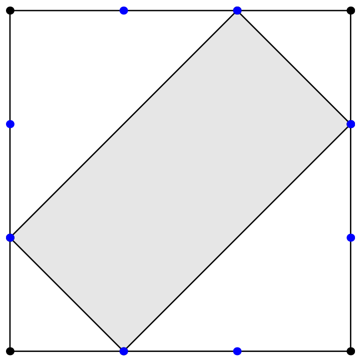
- Niektorá uhlopriečka štvoruholníka je rovnobežná so stranou štvorca.
  Označme vrcholy štvorca a štvoruholníka tak, že uhlopriečka LN je rovnobežná so stranami AB a CD:



Obsah trojuholníka LNK je polovicou obsahu obdĺžnika $LNAB$, obsah trojuholníka LNM je polovicou obsahu obdĺžnika $LNDC$. Trojuholníky LNK a LNM tvoria dokopy celý štvoruholník, obdĺžniky $LNAB$ a $LNDC$ tvoria dokopy daný štvorec. Obsah štvorca je $6\text{ cm} \cdot 6\text{ cm}$ čiže 36 cm^2, obsah štvoruholníka $KLMN$ je polovičný: $36\text{ cm}^2 : 2$ čiže 18 cm^2. Nie je podstatné, či rovnobežné úsečky uvažujeme vodorovne alebo zvisle. Aj umiestnenie bodov K a M na stranách štvorca nehrá v predchádzajúcej úvahe žiadnu podstatnú úlohu.

- Žiadna uhlopriečka štvoruholníka nie je rovnobežná so stranou štvorca.

  V tomto prípade rozlišujeme dve možnosti:

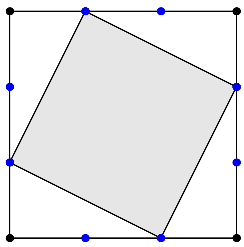
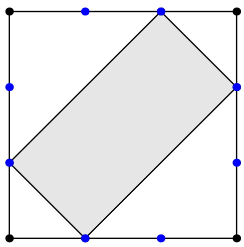
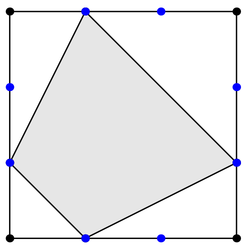
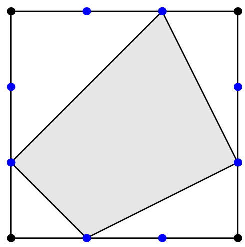



Naozaj platí, že zámena ktoréhokoľvek vrcholu v ktoromkoľvek z týchto štvoruholníkov dáva štvoruholník, ktorého uhlopriečka je rovnobežná so stranou štvorca (teda prípad diskutovaný vyššie). Uvedené štvoruholníky majú navzájom rôzne obsahy, a tie vyjadríme ako rozdiel obsahu celého štvorca a obsahov štyroch trojuholníkových „rožkov“. Obsah štvorca je $6\text{ cm} \cdot 6\text{ cm}$ čiže 36 cm^2. „Rožky“ sú trojakého typu a ich obsahy sú $\frac{1}{2} \cdot 2\text{ cm} \cdot 2\text{ cm}$ čiže 2 cm^2, $\frac{1}{2} \cdot 2\text{ cm} \cdot 4\text{ cm}$ čiže 4 cm^2, $\frac{1}{2} \cdot 4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm}$ čiže 8 cm^2. Obsahy prvého a druhého štvoruholníka sú $36\text{ cm}^2 - 4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm}$ čiže 20 cm^2 a $36\text{ cm}^2 - 2\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} - 2\text{ cm} \cdot 8\text{ cm}$ čiže 16 cm^2.

Karolína mohla dostať štvoruholníky s obsahmi 16 cm^2, 18 cm^2 a 20 cm^2.

Riešenie 2:

Na každej strane štvorca Karolína vyberala jeden z dvoch modrých bodov ako vrchol štvoruholníka. Takto mohla zostrojiť celkom $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ čiže 16 štvoruholníkov. Mnohé z nich sú však navzájom zhodné, teda majú rovnaké obsahy. Navzájom nezhodné štvoruholníky, ktoré mohla Karolína zostrojiť, sú štyri:

Obsah každého štvoruholníka je možné vyjadriť ako rozdiel obsahu celého štvorca a obsahov štyroch trojuholníkových „rožkov“. Pri treťom a štvrtom štvoruholníku odčítame rovnaké rožky (iba iným spôsobom), preto sú obsahy týchto štvoruholníkov rovnaké. Stačí teda preveriť prvé tri štvoruholníky. Ich obsahy sú vypočítané v predchádzajúcom riešení.

Poznámka:

Prípadné zhodnosti v predchádzajúcej úvahe patria medzi súmernosti štvorca, t. j. zobrazenia, ktoré zachovávajú daný štvorec. Tie zahŕňajú osové súmernosti, stredovú súmernosť a otáčanie o 90°. Štvorec má celkom osem súmerností.

---

3 V osemcifernom čísle je každá jeho cifra (okrem poslednej) väčšia ako nasledujúca cifra.

Koľko je všetkých takýchto čísel?

(Iveta Jančigová)

Riešenie 1:

Opísané čísla je možné zostaviť tak, že z desiatich dostupných cifier sa odstránia dve a zvyšných osem sa usporiada zostupne. To je to isté, ako keby sa z desaťciferného čísla 9876543210 odstránili dve cifry:

- Ak by sme z tohto čísla ako prvú cifru odstránili 9, tak by zostalo 9 možností, ktorú cifru odstrániť ako druhú.
- Ak by sme ako prvú cifru odstránili 8, tak by zostalo 8 možností, ktorú cifru odstrániť ako druhú (odstránenie dvojice $(8, 9)$ je zahrnuté v predchádzajúcom prípade).
- Ak by sme ako prvú cifru odstránili 7, tak by zostalo 7 možností, ktorú cifru odstrániť ako druhú (odstránenie dvojíc $(7, 8)$ a $(7, 9$ je zahrnuté v predchádzajúcich prípadoch).
- V podobnom duchu uvažujeme až do konca.
- Ak by sme ako prvú cifru odstránili 1, tak by zostala jediná možnosť, ktorú cifru odstrániť ako druhú, a to 0.

Celkový počet možností, teda počet všetkých čísel vyhovujúcich zadaniu, je $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$ čiže 45.

Riešenie 2:

Počet možností, ako odstrániť 2 cifry z 10, je možné určiť nasledovne:

Prvú cifru z 10 je možné vybrať 10 spôsobmi. Druhú cifru zo zvyšných 9 cifier je možné vybrať 9 spôsobmi. To dáva celkovo $10 \cdot 9$ čiže 90 možností, ako vybrať 2 cifry z 10 s ohľadom na poradie výberu. Toto poradie nás však nezaujíma – nie je podstatné, v akom poradí cifry vyberáme, ale ktoré vyberieme. Teda celkový počet možností je polovičný: $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 9$ čiže 45.

Poznámka:

Predchádzajúce dvojité vyjadrenie toho istého výsledku možno zovšeobecniť takto:

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1).$$

Rovnnaké číslo na oboch stranách vyjadruje počet všetkých dvojíc, ktoré je možné utvoriť z n prvkov (bez ohľadu na poradie výberu).

---

4 V nasledujúcom písomnom násobení dvoch trojciferných čísel sú cifry zastúpené hviezdičkami. Na miesta hviezdičiek doplňte cifry tak, aby bol výpočet správny:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & * & * & * \\
\times & & * & * & * \\
\hline
 & * & * & * & * \\
3 & 1 & 7 & 5 & \\
* & * & * & & \\
\hline
* & * & 6 & * & *
\end{array}$$

(Libuše Hozová)

Riešenie:

Podľa známeho postupu je druhý medzivýsledok 3175 súčinom prvého činiteľa a druhej cifry druhého činiteľa. Ako súčin trojciferného a jednociferného čísla je možné číslo 3175 vyjadriť jediným spôsobom, a to $635 \cdot 5$ (prvočíselný rozklad 3175 je $5 \cdot 5 \cdot 127$). Teda môžeme doplniť:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 6 & 3 & 5 \\
\times & & * & 5 & * \\
\hline
 & * & * & * & * \\
3 & 1 & 7 & 5 & \\
* & * & * & & \\
\hline
* & * & 6 & * & *
\end{array}$$

Tretí medzivýsledok je trojciferné číslo, ktoré je súčinom 635 a prvej cifry druhého činiteľa. Jediným trojciferným násobkom čísla 635 je samo toto číslo. Teda môžeme doplniť:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 6 & 3 & 5 \\
\times & & 1 & 5 & * \\
\hline
 & * & * & * & * \\
3 & 1 & 7 & 5 & \\
6 & 3 & 5 & & \\
\hline
* & * & 6 & * & *
\end{array}
$$

Prvý medzivýsledok je štvorciferné číslo, ktoré je súčinom 635 a tretej cifry druhého činiteľa. Štvorciferné násobky čísla 635 sú tieto:

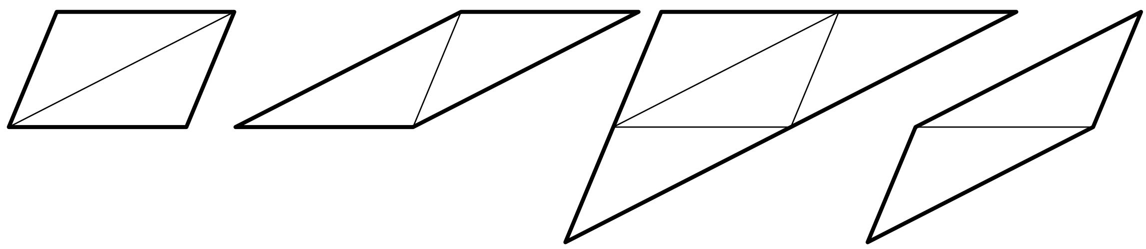
- $635 \cdot 2$ čiže 1270,
- $635 \cdot 3$ čiže 1905,
- $635 \cdot 4$ čiže 2540,
- $635 \cdot 5$ čiže 3175,
- $635 \cdot 6$ čiže 3810,
- $635 \cdot 7$ čiže 4445,
- $635 \cdot 8$ čiže 5080,
- $635 \cdot 9$ čiže 5715.

Aby tretia cifra vo výslednom súčine bola 6, musí byť druhá cifra prvého medzivýsledku buď 3, alebo 4 (podľa toho, či došlo k prechodu cez desiatku alebo nie). Medzi vyššie uvedenými kandidátmi spĺňa túto podmienku iba číslo 4445. Teda môžeme doplniť a dopočítať výsledok:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 6 & 3 & 5 \\
\times & & 1 & 5 & 7 \\
\hline
 & 4 & 4 & 4 & 5 \\
3 & 1 & 7 & 5 & \\
6 & 3 & 5 & & \\
\hline
9 & 9 & 6 & 9 & 5
\end{array}
$$

---

5 Z navzájom zhodných trojuholníkov je zložených niekoľko rovinných útvarov.



Obvody prvých troch sú postupne 8 cm, 11,4 cm a 14,7 cm.

Vypočítajte obvod štvrtého útvaru.

(Eva Semerádová)

Riešenie:

V obvodoch prvého, druhého a štvrtého útvaru sú započítané vždy dve z troch strán základného trojuholníka, a to tak, že každá z dvoch strán je započítaná dvakrát a v obvodoch rôznych útvarov sú zahrnuté rôzne dvojice strán.

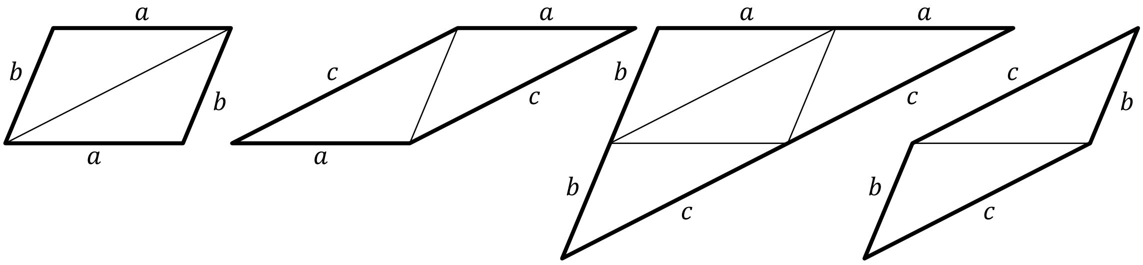
V obvode tretieho útvaru sú započítané všetky strany základného trojuholníka, a to opäť každá dvakrát.

Teda súčet obvodov prvého, druhého a štvrtého útvaru je rovný dvojnásobku obvodu tretieho útvaru. To znamená, že neznámy obvod štvrtého útvaru je rovný rozdielu obvodov prvého a druhého útvaru od dvojnásobku obvodu tretieho:

$$2 \cdot 14{,}7\ \text{cm} - 8\ \text{cm} - 11{,}4\ \text{cm} = 29{,}4\ \text{cm} - 19{,}4\ \text{cm} = 10\ \text{cm}.$$

Aby však bolo riešenie úplné, treba ukázať, že uvažované elementárne trojuhloníky naozaj existujú.

Zo zadania je možné odvodiť veľkosti strán základného trojuholníka, ktoré na tento účel označíme a, b, c:



Rozdiel obvodov tretieho a prvého útvaru je rovný dvojnásobku c, teda

$$c = \frac{1}{2}(14{,}7\ \mathrm{cm} - 8\ \mathrm{cm}) = 3{,}35\ \mathrm{cm}.$$

Rozdiel obvodov tretieho a druhého útvaru je rovný dvojnásobku b, teda

$$b = \frac{1}{2}(14{,}7\ \mathrm{cm} - 11{,}4\ \mathrm{cm}) = 1{,}65\ \mathrm{cm}.$$

Z toho a zo známych obvodov prvých troch útvarov je možné vyjadriť veľkosť poslednej strany základného trojuholníka:

$$a = \frac{8}{2}\ \mathrm{cm} - 1{,}65\ \mathrm{cm} = \frac{11{,}4}{2}\ \mathrm{cm} - 3{,}35\ \mathrm{cm} = \frac{14{,}7}{2}\ \mathrm{cm} - 1{,}65\ \mathrm{cm} - 3{,}35\ \mathrm{cm} = 2{,}35\ \mathrm{cm}.$$

Hodnoty a, b, c spĺňajú trojuholníkové nerovnosti, teda trojuholník so stranami týchto dĺžok naozaj existuje.

Poznámka:

Z uvedeného môžeme pre kontrolu odvodiť obvod štvrtého útvaru:

$$2(b + c) = 2(1{,}65\ \mathrm{cm} + 3{,}35\ \mathrm{cm}) = 10\ \mathrm{cm}.$$

---

6 Alex, Barbora, Cyril, Dana, Eva, František a Gabika sa stali na svojich školách víťazmi v stolnom tenise a zišli sa na dvojdňovom turnaji o celkového víťaza. Každé z týchto siedmich detí malo počas turnaja zohrať jeden zápas s každým iným. Prvý deň turnaja hral Alex jeden zápas, Barbora hrala dva zápasy, Cyril tri, Dana štyri, Eva päť zápasov a František šesť.

Koľko zápasov hrala prvý deň Gabika?

(Libuše Hozová)

Riešenie:

Detí bolo sedem, teda každé mohlo odohrať najviac šesť hier. František odohral šesť hier, takže hral s každým z prítomných detí.

Alex odohral jednu hru, takže nehral s nikým iným ako s Františkom. Eva odohrala päť hier, takže hrala so všetkými okrem Alexa.

Barbora odohrala dve hry, takže nehrala s nikým iným ako s Františkom a Evou. Dana odohrala štyri hry, takže hrala so všetkými okrem Alexa a Barbory.

Cyril odohral tri hry, a to s Františkom, Evou a Danou.

S Gabikou hrali František, Eva a Dana, teda Gabika odohrala tri hry.

Poznámka:

Predchádzajúce závery sú prehľadne znázornené v tabuľke:

	A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.
A.	–					•	
B.		–			•	•	
C.			–	•	•	•	
D.			•	–	•	•	•
E.		•	•	•	–	•	•
F.	•	•	•	•	•	–	•
G.				•	•	•	–
