MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z8

1 V minulom roku bolo v našom skautskom oddiele o 30 chlapcov viac ako dievčat. Tento rok sa počet detí v oddiele zväčšil o 10 %, pričom počet chlapcov sa zväčšil o 5 % a počet dievčat sa zväčšil o 20 %.

Koľko detí máme tento rok v oddiele?

(Libuše Hozová)

Riešenie 1:

Ako počty detí, tak ich tohtoročné prírastky sú vyjadrené prirodzenými číslami. Vzhľadom na to, že $10\,\% = 10/100 = 1/10$, musel byť pôvodný počet všetkých detí násobkom 10. Podobne platí, že pôvodný počet chlapcov bol násobkom 20, pretože $5\,\% = 5/100 = 1/20$. a pôvodný počet dievčat bol násobkom 5, pretože $20\,\% = 20/100 = 1/5$. Keďže chlapcov bolo o 30 viac ako dievčat, najmenšie možné pôvodné počty boli nasledujúce (c, resp. d označuje pôvodný počet chlapcov, resp. dievčat) a do tabuľky pridáme aj tohtoročné prírastky:

c	d	$c+d$	$1{,}05c$	$1{,}2d$	$1{,}05c+1{,}2d$	$1{,}1(c+d)$
40	10	50	42	12	54	55
60	30	90	63	36	99	99
80	50	130	84	60	144	143
100	70	170	105	84	189	187
120	90	210	126	108	234	231
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Súčet nových počtov chlapcov a dievčat je rovný pôvodnému súčtu zväčšenému o 10 % práve v druhom prípade. So zväčšujúcimi sa číslami sa rozdiel medzi týmito dvoma hodnotami len zväčšuje. Tento rok je v skautskom oddiele 99 detí.

Riešenie 2:

Situáciu je možné zapísať pomocou rovnice

$$1{,}05c + 1{,}2d = 1{,}1(c+d),$$

kde $c = d + 30$. Po dosadení a úpravách dostávame

$$2{,}25d + 31{,}5 = 2{,}2d + 33,$$

$$0{,}05d = 1{,}5,$$

$$d = 30,$$

čo zodpovedá druhému z vyššie uvedených prípadov uvedených v 1. riešení.

Riešenie 3:

Pôvodný počet dievčat označme x, pôvodný počet chlapcov je potom $x + 30$, takže pôvodný celkový počet detí je $2x + 30$. Nový počet detí je potom $(1 + 10\,\%)(2x + 30)$, nový počet chlapcov $(1 + 5\,\%)(x + 30)$ a nový počet dievčat $(1 + 20\,\%)x$, platí teda

$$(1 + 10\,\%)(2x + 30) = (1 + 5\,\%)(x + 30) + (1 + 20\,\%)x.$$

Upravujme:

$$\left(1+\frac{10}{100}\right)(2x+30) = \left(1+\frac{5}{100}\right)(x+30) + \left(1+\frac{20}{100}\right)x,$$

$$(100+10)(2x+30) = (100+5)(x+30) + (100+20)x,$$

$$110(2x+30) = 105(x+30) + 120x,$$

$$22(2x+30) = 21(x+30) + 24x,$$

$$44x + 660 = (21x + 630) + 24x,$$

$$44x + 660 = 45x + 630,$$

$$30 = x.$$

Pôvodný počet dievčat je teda 30, pôvodný počet chlapcov je potom $30+30$ čiže 60, takže pôvodný celkový počet detí je $30 + 60$ čiže 90. Nový počet chlapcov sa oproti ich pôvodnému počtu 60 zväčšil o 5 %, čo je 3, takže spolu je to $60 + 3$ čiže 63. Nový počet dievčat sa oproti ich pôvodnému počtu 30 zväčšil o 20 %, čo je 6, takže spolu je to $30 + 6$ čiže 36. Celkový nový počet detí je teda 99, takže sa oproti ich pôvodnému počtu 90 zväčšil o 9, čo je naozaj 10 %.

V oddiele je tento rok 99 detí.

---

2 Adam mal papier, ktorý bol natoľko veľký, že by sa z neho dalo natrhať niekoľko desiatok tisíc kúskov. Najprv papier roztrhal na štyri kúsky. Každý z týchto kúskov vzal a roztrhal buď na štyri, alebo na desať kúskov. Rovnakým spôsobom pokračoval ďalej: každý novovzniknutý kúsok roztrhal buď na štyri, alebo na desať menších kúskov.

Rozhodnite a vysvetlite, či môže Adam týmto spôsobom natrhať presne 20 000 kúskov.

(Iveta Jančigová)

Riešenie:

Keď Adam roztrhá nejaký kúsok na 4 menšie kúsky, celkový počet kúskov sa zväčší o 3. Keď Adam roztrhá nejaký kúsok na 10 menších kúskov, celkový počet kúskov sa zväčší o 9. Platí, že počet kúskov po každom trhaní dáva rovnaký zvyšok po delení 3. Na začiatku mal Adam jeden kus papiera, teda po každom trhaní bol zvyšok po delení aktuálneho počtu kúskov 3 rovný 1.

Avšak zvyšok po delení 20 000 číslom 3 je 2. Adam teda nemohol natrhať 20 000 kúskov.

---

3 V športovom areáli tvorili stanovištia vrcholy pravidelného päťuholníka $ABCDE$. Tieto stanovištia boli pospájané priamymi cestami. Na ceste z A do B bola fontána F, ktorú so stanovišťom C spájala cesta kolmá na cestu z B do E. Pat a Mat sa zišli na stanovišti E a rozhodli sa zamiesť niektoré cesty. Pat pozametal cestu z E do B. Mat pozametal cestu z E do A a ešte z A do F.

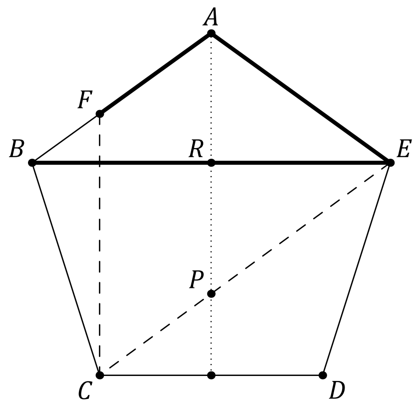
Určte, ktorý z nich zametal dlhší úsek.

(Libuše Hozová)

Riešenie 1:

V pravidelom päťuholníku $ABCDE$ je os strany CD aj osou uhla EAB a je kolmá na uhlopriečku BE, takže je aj rovnobežná s úsečkou FC.

Uhlopriečky EB a EC sú zhodné. Ich priesečníky s osou úsečky DC označme postupne R a P.



Uhlopriečka EC je rovnobežná so stranou AB, takže štvoruholník $AFCP$ je rovnobežník, z čoho $|AF| = |PC|$.

Keďže AR je os uhla EAB pravidelného päťuholníka, ktorý má uhol 108°, platí $|\sphericalangle EAR| = 54°$, z pravouhlého trojuholníka ARE potom $|\sphericalangle AER| = 36°$.

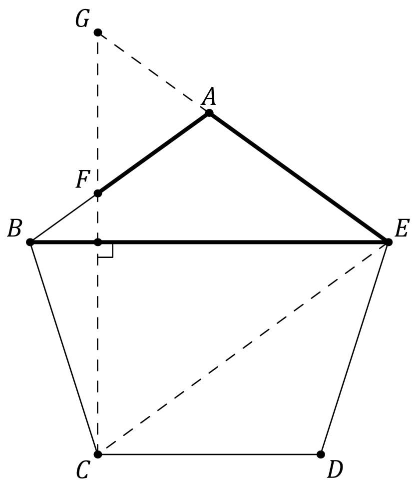
Z rovnoramenného trojuholníka ECD s uhlom CDE veľkosti 108° máme $|\sphericalangle DEC| = 36°$, takže uhol REP chýbajúci do uhla AED má tiež veľkosť 36°. Podľa vety *usu* sú potom trojuholníky ARE a PRE zhodné, z čoho $|AE| = |PE|$. Platí preto

$$|EB| = |EC| = |EP| + |PC| = |EA| + |AF|.$$

Pat a Mat teda pozametali rovnako dlhé úseky.

Riešenie 2:

Nech G je priesečník priamok CF a AE.



Keďže $ABCDE$ je pravidelný päťuholník, možno mu opísať kružnicu a AB a BC sú jej zhodné tetivy. Uhly CEB a BEA sú preto zhodné, a teda EB je os uhla CEA čiže CEG. Pretože je EB kolmá na priamku CF čiže CG, trojuholník CEG je rovnoramenný so základňou CG.

Z pravidelnosti päťuholníka $ABCDE$ vyplýva, že $AF = AB \parallel EC$, takže

$$|\sphericalangle AFG| = |\sphericalangle ECG| = |\sphericalangle EGC| = |\sphericalangle AGF|,$$

a teda trojuholník FAG je rovnoramenný so základňou FG.

Keďže $ABCDE$ je pravidelný päťuholník, jeho uhlopriečky EB a EC sú rovnako dlhé. Preto platí

$$|EA| + |AF| = |EA| + |AG| = |EG| = |EC| = |EB|.$$

Pat a Mat teda zametali rovnako dlhé úseky.

---

4 Hynek napísal nasledujúci súčet s piatimi záhadnými sčítancami:

@ + ## + ∗∗∗ + &&&& + $$$$$.

Prezradil, že znaky @, #, ∗, &, $ predstavujú navzájom rôzne cifry 1, 2, 3, 4, 5 a že výsledný súčet je deliteľný jedenástimi.

Ktoré najmenšie a ktoré najväčšie číslo môže byť výsledkom Hynkovho súčtu?

(Erika Novotná)

Riešenie:

Hynkov súčet môžeme prepísať ako

@ + 11 · # + 111 · ∗ + 1111 · & + 11 111 · $.

Druhý a štvrtý sčítanec je deliteľný 11. Koeficient 111 pri treťom sčítanci a 11 111 pri piatom sčítanci dávajú po delení 11 zvyšok 1. Teda pôvodný súčet je deliteľný 11 práve vtedy, keď súčet @ + ∗ + $ je deliteľný 11.

Z dostupných čísel je možné číslo 11 (alebo jeho násobok) vyjadriť jedine ako $2 + 4 + 5$. Teda znaky @, ∗, $ predstavujú čísla 2, 4, 5 v nejakom poradí. Na znaky # a & zostávajú čísla 1 a 3 v nejakom poradí.

Najmenší súčet dostaneme, ak znakom $, &, ∗, #, @ postupne priradíme najmenšie možné čísla v rámci predchádzajúcich obmedzení:

$$5 + 33 + 444 + 1\,111 + 22\,222 = 23\,815.$$

Najväčší súčet dostaneme, ak znakom $, &, ∗, #, @ postupne priradíme najväčšie možné čísla v rámci predchádzajúcich obmedzení:

$$2 + 11 + 444 + 3\,333 + 55\,555 = 59\,345.$$

Výsledkom Hynkovho súčtu môže byť najmenej 23 815 a najviac 59 345.

Poznámka:

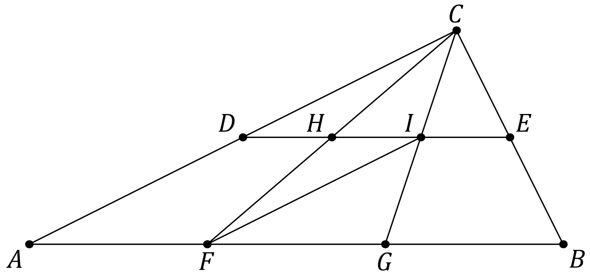
Počet možností, ako piatim znakom priradiť päť cifier, je $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ čiže 120. Aj bez úvodných postrehov je možné určiť najmenší a najväčší súčet bez toho, aby sa museli preberať všetky možnosti. Napr. najväčší možný súčet, ktorý je možné z daných cifier dostať bez nároku na deliteľnosť 11, zodpovedá priradeniu $ = 5, & = 4, ∗ = 3, # = 2, @ = 1, čo skrátene zapíšeme ako $(5, 4, 3, 2, 1)$. Možné súčty zostupne zodpovedajú priradeniam $(5, 4, 3, 2, 1)$, $(5, 4, 3, 1, 2)$, $(5, 4, 2, 3, 1)$, $(5, 4, 2, 1, 3)$, $(5, 4, 1, 3, 2)$, $(5, 4, 1, 2, 3)$, $(5, 3, 4, 2, 1)$, $(5, 3, 4, 1, 2)$, (5, 3, 2, 4, 1), (5, 3, 2, 1, 4), … Postupným výpočtom zodpovedajúcich súčtov a overením ich deliteľnosti 11 je možné odhaliť najväčšiu vyhovujúcu možnosť.

Pri hľadaní najmenšieho možného Hynkovho súčtu je možné postupovať podobne, počnúc (1, 2, 3, 4, 5).

---

5 Trojuholník ABC je rozdelený úsečkami ako na obrázku. Úsečky DE a AB sú rovnobežné. Trojuholníky CDH, CHI, CIE, FIH majú rovnaký obsah, a to $8\,\mathrm{dm}^2$.

Zistite obsah štvoruholníka $AFHD$.



(Eva Semerádová)

Riešenie:

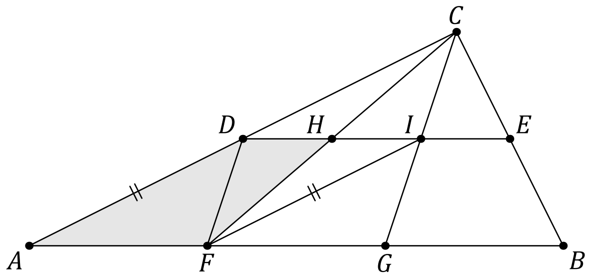
Trojuholníky CDH a CHI majú spoločnú stranu CH, teda majú rovnakú výšku zo spoločného vrcholu C. Tieto trojuholníky majú rovnaký obsah, teda úsečky DH a HI sú zhodné. Trojuholníky CHI a FIH majú spoločnú stranu HI, teda majú rovnakú výšku zo spoločného vrcholu I. Tieto trojuholníky majú rovnaký obsah, teda úsečky CH a HF sú zhodné.

Predchádzajúce závery znamenajú, že H je stredom úsečiek DI a CF, čo sú uhlopriečky štvoruholníka $CDFI$. Tento štvoruholník je teda rovnobežník, ktorý je uhlopriečkami rozdelený na štyri trojuholníky s rovnakým obsahom. Obsah rovnobežníka $CDFI$ je teda rovný štvornásobku obsahu trojuholníka CDH.

Z uvedeného vyplýva, že priamky AC a FI sú rovnobežné, teda aj štvoruholník $AFID$ je rovnobežník. Tento rovnobežník má s rovnobežníkom $CDFI$ spoločný trojuholník DFI, ktorý tvorí polovicu ako prvého, tak druhého rovnobežníka. Obsah rovnobežníka $AFID$ je teda rovnaký ako obsah rovnobežníka $CDFI$.

Obsah štvoruholníka $AFHD$ môžeme vyjadriť takto:

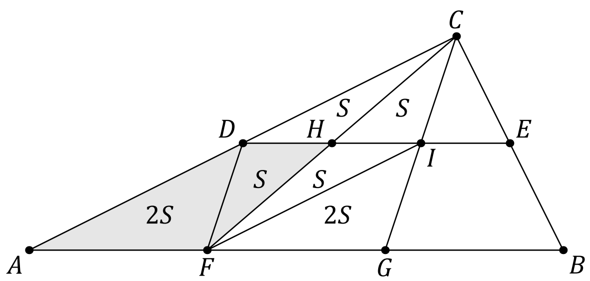
$$\mathrm{S}(AFHD) = \mathrm{S}(AFID) - \mathrm{S}(FIH) = \mathrm{S}(CDFI) - \mathrm{S}(CDH) = 4 \cdot \mathrm{S}(CDH) - \mathrm{S}(CDH) = 3 \cdot 8\,\mathrm{dm}^2 = 24\,\mathrm{dm}^2.$$



Poznámka:

Štvoruholník $AFHD$ je vlastne lichobežník. Body B a E nehrajú pri riešení úlohy žiadnu rolu. Z úvodných postrehov vyplýva niekoľko ďalších skutočností, ktoré je možné použiť pri riešení úlohy:

Úsečky DI, IF a FD sú strednými priečkami trojuholníka AGC a tie rozdeľujú tento trojuholník na štyri zhodné trojuholníky. Obsah každého z týchto trojuholníkov sa rovná dvojnásobku obsahu referenčného trojuholníka CDH (na obrázku vyznačené ako S). $\mathrm{S}(AFHD) = 3 \cdot \mathrm{S}(CDH)$.



Trojuholníky CDH a CAF sú podobné s koeficientom 2. Obsah trojuholníka CAF je preto štvornásobkom obsahu trojuholníka CDH. $\mathrm{S}(AFHD) = \mathrm{S}(CAF) - \mathrm{S}(CDH) = 3 \cdot \mathrm{S}(CDH)$.

6 Adam vpísal do tabuľky 3×3 čísla od 1 po 9 ako na obrázku:

7	6	4
1	2	8
9	3	5

Pre toto vyplnenie platí, že súčet čísel troch políčok pozdĺž každej strany je stále rovnaký. Adam zistil, že čísla do tabuľky je možné vyplniť aj inak, bez toho, aby pokazil vlastnosť s rovnakými súčtami pozdĺž strán.

Akú najmenšiu hodnotu môže mať tento súčet? Uveďte príklad tabuľky s najmenším súčtom pozdĺž strán a vysvetlite, prečo menší súčet byť nemôže.

(Josef Tkadlec)

Riešenie 1:

Vzhľadom na to, že každé rohové políčko vystupuje v dvoch súčtoch, snažíme sa do týchto políčok umiestniť najmenšie možné čísla a nejako doplniť zvyšok. Po chvíli skúšania je možné odhaliť napr. nasledujúce vyplnenie, v ktorom je súčet čísel pozdĺž každej strany rovný 12:

1	8	3
9	7	5
2	6	4

Vyplnenie s menšími súčtami nie je možné. Najmenší možný súčet pozdĺž strany so sčítancom 9 je $1 + 2 + 9$ čiže 12. Teda číslo 9 by muselo byť uprostred tabuľky a zvyšné čísla pozdĺž strán. Najmenší možný súčet pozdĺž strany so sčítancom 8 je $1 + 2 + 8 = 11$. Teda menší súčet dosiahnuť nemožno a rozmýšľame nad doplnením tabuľky, v ktorej pozdĺž jednej strany sú čísla 1, 2 a 8. Pozdĺž protiľahlej strany by boli tri zo zvyšných piatich čísel. Najmenšie možné čísla sú 3, 4 a 5, ktorých súčet je však $3 + 4 + 5 = 12$, čo je viac než 11.

Najmenšia možná hodnota súčtu v Adamovej tabuľke je 12.

Riešenie 2:

Každé zo štyroch rohových políčok prispieva do dvoch súčtov, každé zo zvyšných štyroch políčok pozdĺž strán prispieva do jedného súčtu. Teda súčet všetkých štyroch súčtov pozdĺž strán je aspoň

$$2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) + (5 + 6 + 7 + 8)$$

čiže 46. Požiadavka rovnosti súčtov pozdĺž strán znamená, že predchádzajúci súčet by musel byť deliteľný 4. Najbližšie väčšie číslo deliteľné štyrmi je 48. Teda najmenšia možná hodnota súčtu v Adamovej tabuľke je $48 : 4$ čiže 12. Vyššie uvedená tabuľka ukazuje, že také vyplnenie je možné.