MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Riešenia úloh krajského kola kategórie Z9

1 V základnej škole, kam chodí aj Lukáš, organizujú vedomostnú súťaž s vopred zoradenými úlohami. Každá správne vyriešená úloha je hodnotená toľkými bodmi, aké je jej poradie. Každá neriešená či nie celkom správne vyriešená úloha je hodnotená 0 bodmi. Lukáš správne vyriešil len prvých 12 úloh. Ak by správne vyriešil len posledných 12 úloh, získal by o 708 bodov viac.

Koľko bolo súťažných úloh?

(Michaela Petrová)

Riešenie 1:

Ak v súčte $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$ každý sčítanec zväčšíme o $k - 1$, dostaneme súčet 12 po sebe idúcich prirodzených čísel počnúc k, ktorý bude od neho o $(k - 1) \cdot 12$ väčší. Ak je má teda prvá z posledných 12 úloh hodnotu k bodov, posledných 12 úloh má o $(k - 1) \cdot 12$ bodov viac než prvých 12 úloh. Platí teda

$$(k - 1) \cdot 12 = 708,$$

takže

$$k - 1 = 59,$$

$$k = 60.$$

Keďže prvá z posledných 12 úloh má hodnotu 60, posledná má hodnotu o 11 väčšiu, t. j. 71.

Súťažných úloh bolo 71.

Riešenie 2:

Súčet 12 po sebe idúcich čísel počnúc m je $m + (m + 1) + \cdots + (m + 10) + (m + 11)$ čiže $(2m + 11) \cdot 6$.

Súčet bodov za úlohy 1 až 12 je teda $(2 \cdot 1 + 11) \cdot 6$ čiže 78, a ak je k číslo 12. úlohy od konca, súčet bodov za posledných 12 úloh je $(2k + 11) \cdot 6$. Podľa zadania teda platí

$$78 + 708 = (2k + 11) \cdot 6,$$

ekvivalentne

$$786 = (2k + 11) \cdot 6,$$

$$131 = 2k + 11,$$

$$120 = 2k,$$

$$60 = k.$$

Keďže prvá z posledných 12 úloh má hodnotu 60, posledná má hodnotu o 11 väčšiu, t. j. 71.

Súťažných úloh bolo 71.

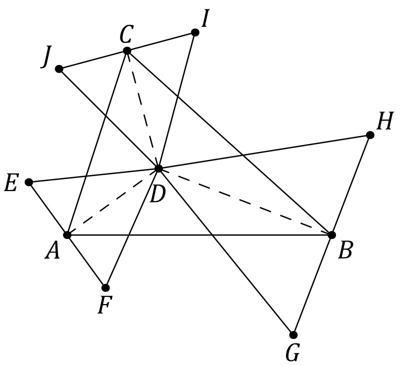
Poznámka:

Pri súčte $m + (m + 1) + \cdots + (m + 10) + (m + 11)$ využívame to, že súčet prvého a posledného čísla je rovnaký ako súčet druhého a predposledného atď. a že takýchto dvojíc je 6.

Hodnotenie:

- 2 body za čiastkové postrehy týkajúce sa súčtu 12 po sebe idúcich čísel;
- 2 body za formuláciu problému pomocou neznámej (napr. $(k - 1) \cdot 12 = 708$ ako pri prvom riešení alebo $(2k + 11) \cdot 6 = 786$ ako pri druhom);
- 2 body za doriešenie a kvalitu komentára.

2 Nech ABC je trojuholník a D priesečník osí jeho vnútorných uhlov. Nech DEF, DGH, DIJ sú rovnostranné trojuholníky také, že vrcholy A, B, C sú postupne stredy strán EF, GH, IJ a body E, G, I ležia postupne v uhloch CDA, ADB, BDC. Veľkosť uhla EDJ je 51°, veľkosť uhla HDI je 66°.



Určte veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC.

(Karel Pazourek)

Riešenie:

Vnútorné uhly trojuholníka ABC označme zvyčajným spôsobom α, β, γ. Osi vnútorných uhlov trojuholníka ABC sú osami súmerností týchto uhlov, teda platí $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle DAB| = \frac{\alpha}{2}$ atď. Trojuholníky DEF, DGH, DIJ sú rovnostranné a body A, B, C sú stredy strán protiľahlých spoločnému vrcholu D. Priamky DA, DB, DC sú teda osami súmerností týchto trojuholníkov a platí $|\sphericalangle EDA| = |\sphericalangle ADF| = 30°$ atď.

Keďže súčet uhlov v trojuholníku je 180°, platí

$$\begin{aligned} 180° &= |\sphericalangle DAC| + |\sphericalangle ACD| + |\sphericalangle CDA| \\ &= |\sphericalangle DAC| + |\sphericalangle ACD| + (|\sphericalangle CDJ| + |\sphericalangle JDE| + |\sphericalangle EDA|) \\ &= \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} + (30° + 51° + 30°) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} + 111°, \end{aligned}$$

takže

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = 69°,$$

a teda

$$\alpha + \gamma = 138°.$$

Z toho

$$180° = \alpha + \beta + \gamma = \beta + 138°,$$

takže

$$\beta = 42°.$$

Podobne

$$\begin{aligned} 180° &= |\sphericalangle DBC| + |\sphericalangle BCD| + |\sphericalangle CDB| \\ &= |\sphericalangle DBC| + |\sphericalangle BCD| + (|\sphericalangle CDI| + |\sphericalangle IDH| + |\sphericalangle HDB|) \\ &= \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + (30° + 66° + 30°) = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + 126°, \end{aligned}$$

takže

$$\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 54°,$$

a teda

$$\beta + \gamma = 108°.$$

Z toho

$$180° = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + 108°,$$

takže

$$\alpha = 72°.$$

Potom

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 42° - 72° = 66°.$$

Veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC sú 72°, 42° a 66°.

Hodnotenie:

- 2 body za úvodné pozorovania súvisiace s osami uhlov;

- 2 body za určenie pomocných uhlov a zostavenie rovníc;
- 2 body za doriešenie a kvalitu komentára.

---

3 Na stranách trojuholníka ABC sú dané body D, E, F, G, H také, že platí:

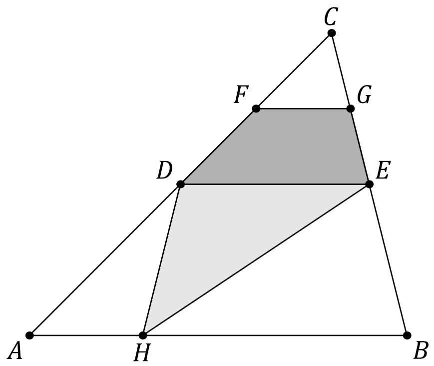
- bod D je stredom strany AC,
- bod E je stredom strany BC,
- body F a G ležia postupne na úsečkách CD a CE tak, že $FG \parallel DE$,
- bod H leží na úsečke AB tak, že $|AH| : |AB| = 3 : 7$,
- pomer obsahov mnohouholníkov $DEGF$ a $DHEGF$ je $3 : 7$.

Určte pomer veľkostí úsečiek FG a DE.

(Mária Dományová)

Riešenie:

Situáciu zo zadania si znázorníme na obrázku:



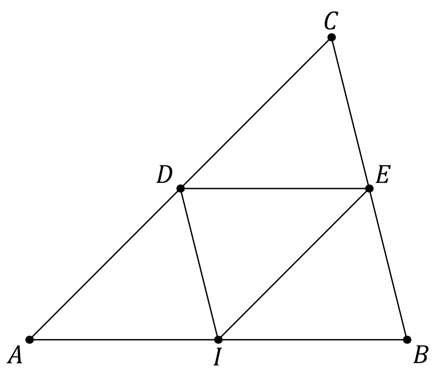
Úsečka DE je strednou priečkou trojuholníka ABC. Trojuholníky DEH a DEC majú spoločnú stranu DE a zhodné výšky na túto stranu, teda majú rovnaký obsah (a to nezávisle od polohy bodu H na úsečke AB).

Štvoruholník $DEGF$ je časťou päťuholníka $DHEGF$ a pomer ich obsahov je $3 : 7$. Teda pomer obsahov štvoruholníka $DEGF$ a trojuholníka DEH, resp. štvoruholníka $DEGF$ a trojuholníka DEC je $3 : 4$. Štvoruholník $DEGF$ je časťou trojuholníka DEC, teda pomer obsahov trojuholníkov FGC a DEC je $1 : 4$.

Úsečky FG a DE sú rovnobežné, teda trojuholníky FGC a DEC sú podobné. Pomer veľkostí zodpovedajúcich dvojíc úsečiek je preto $1 : 2$, teda aj hľadaný pomer veľkostí úsečiek FG a DE je $1 : 2$.

Poznámka:

Pozorovanie z prvého odseku riešenia je možné využiť tiež tak, že namiesto bodu H uvažujeme stred úsečky AB, ktorý nazveme I:

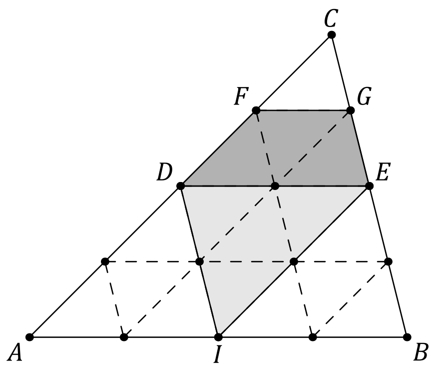


Trojuholník ABC je tak strednými priečkami DI, IE, ED rozdelený na štyri navzájom zhodné trojuholníky, a teda platí, že pomer obsahov štvoruholníka $BEDA$ a trojuholníka ABC je $3 : 4$.

Naopak, ak $DE \parallel AB$ a pomer obsahov $BEDA$ a ABC je $3 : 4$, tak DE je strednou priečkou trojuholníka ABC.

Podobnou úvahou o štvoruholníku $DEGF$ a trojuholníku DEC možno odvodiť, že FG je strednou priečkou trojuholníka DEC.

Prikladáme ilustráciu, v ktorej sú všetky vyššie spomínané pomery dobre zrejmé:



Hodnotenie:

- 1 bod za pozorovanie, že trojuholníky DEH a DEC majú rovnaký obsah;
- 3 body za ďalšie čiastkové závery týkajúce sa pomerov obsahov;
- 2 body za výsledok a kvalitu komentára.

---

4 Nájdite všetky trojice trojciferných prirodzených čísel (a, b, c) také, že

$$b^2 = a \cdot c, \quad b = a + 34.$$

(Erika Novotná)

Riešenie:

Po úprave

$$c = \frac{b^2}{a} = \frac{(a+34)^2}{a} = \frac{a^2 + 68a + 34^2}{a} = a + 68 + \frac{34^2}{a}$$

zisťujeme, že c je prirodzené číslo práve vtedy, keď a je prirodzený deliteľ čísla 34^2.

Keďže $34^2 = 2^2 \cdot 17^2$, prirodzené delitele 34^2 sú 1, 2, 4, 17, 34, 68, 289, 578, 1156. Z toho trojciferné sú 289 a 578, to sú teda jediné možné hodnoty a.

- Ak $a = 289$, tak
$$b = a + 34 = 289 + 34 = 323$$
  a
$$c = a + 68 + \frac{34^2}{a} = 289 + 68 + \frac{34^2}{289} = 289 + 68 + 4 = 361,$$
  čo sú v trojciferné čísla.
- Ak $a = 578$, tak
$$b = a + 34 = 578 + 34 = 612$$
  a
$$c = a + 68 + \frac{34^2}{a} = 578 + 68 + \frac{34^2}{578} = 578 + 68 + 2 = 648,$$
  čo sú trojciferné čísla.

Hľadané trojice čísel sú $(289, 323, 361)$ a $(578, 612, 648)$.

Hodnotenie:

- 2 body za vyjadrenie $c = a + 68 + \frac{34^2}{a}$ alebo analogickú úpravu;
- 2 body za trojciferné delitele čísla 34^2 a zodpovedajúci rozbor možností;
- 2 body za výsledok a kvalitu komentára.
