MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z6

1 Žiaci dostali prirodzené číslo menšie ako 100. Alex dané číslo zaokrúhlil na desiatky. Barbora dané číslo zaokrúhlila na stovky. Cyril dané číslo vynásobil dvoma. Dana zaokrúhlené Alexovo číslo a Barborino číslo sčítala. Eva od Daninho čísla odpočítala Cyrilovo číslo. František oznámil Evin výsledok a ten bol 30.

Ktoré číslo mohli žiaci na začiatku dostať? Určte všetky možnosti.

(Eva Semerádová)

Riešenie:

Danino číslo (súčet Alexovho a Barborinho čísla) bolo o 30 väčšie ako Cyrilovo (dvojnásobok daného čísla).

Ak by dané číslo bolo menšie ako 50, tak by Barborino číslo bolo 0 (zaokrúhlenie na stovky). V takom prípade by Danino číslo bolo rovnaké ako Alexovo a to nemôže byť väčšie ako Cyrilovo číslo. Teda dané číslo bolo aspoň 50.

Zaokrúhlené Alexovo a Barborino číslo, a preto aj Danino číslo, bolo násobkom 10. Tiež rozdiel Daninho a Cyrilovho čísla bol násobkom 10. Teda dané číslo bolo násobkom 5.

Pre čísla od 50 do 99, ktoré sú násobkami 5, preberieme všetky možnosti:

číslo	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95
Alex	50	60	60	70	70	80	80	90	90	100
Barbora	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
Cyril	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
Dana	150	160	160	170	170	180	180	190	190	200
Eva	50	50	40	40	30	30	20	20	10	10

V Evinom riadku je číslo 30 v stĺpcoch pre čísla 70 a 75. Žiaci teda mohli dostať buď číslo 70, alebo číslo 75.

Hodnotenie:

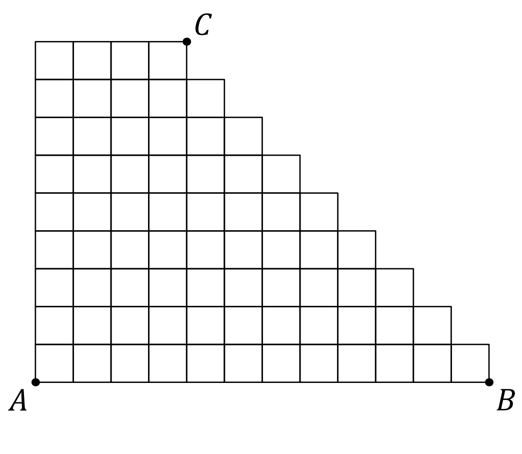
2 body za čiastočné pozorovania týkajúce sa daného čísla; po 1 bode za každú správnu možnosť; 2 body za úplnosť komentára.

2 Zo zhodných štvorcov so stranou dĺžky 1 cm je zložený útvar s nasledujúcimi vlastnosťami:

- Útvar je tvorený radmi susediacich štvorcov.
- Spodný rad pozostáva z 12 štvorcov.
- Každý vyšší rad začína zľava rovnako ako rad pod ním, má však o jeden štvorec menej.
- Horný rad tvoria 4 štvorce.

Vrcholy spodnej strany útvaru sú označené A a B, pravý vrchol hornej strany je označený C.

Určte obsah trojuholníka ABC.



(Erika Novotná, Karel Pazourek)

Riešenie:

Počet vodorovných radov útvaru je toľko, koľko je celých čísel od 4 do 12, a to je 9.

Obsah trojuholníka ABC je polovica z obdĺžnika tvoreného 9 radmi po 12 štvorcoch, čo je $\frac{1}{2} \cdot 12\,\mathrm{cm} \cdot 9\,\mathrm{cm}$ čiže $54\,\mathrm{cm}^2$.

Hodnotenie:

3 body za počet radov útvaru; 3 body za obsah trojuholníka.

---

3 V krajine Binária žijú matematici niekoľkých úrovní. Všetci matematici rovnakej úrovne vyriešia za deň rovnaký počet úloh. Matematik vyššej úrovne vyrieši za deň dvojnásobné množstvo úloh ako matematik predchádzajúcej úrovne (teda napríklad matematik štvrtej úrovne vyrieši za deň dvakrát viac úloh ako matematik tretej úrovne).

Traja matematici piatej úrovne vyriešia za deň o tisíc úloh viac ako štyria matematici druhej úrovne.

Koľko úloh vyrieši za deň jeden matematik druhej úrovne?

(Karel Pazourek, Michaela Petrová)

Riešenie:

Najprv porovnáme výkonnosti matematikov rôznych úrovní:

- Matematik 3. úrovne vyrieši za deň 2-násobok toho, čo matematik 2. úrovne.
- Matematik 4. úrovne vyrieši za deň 2-násobok toho, čo matematik 3. úrovne, t. j. 4-násobok toho, čo matematik 2. úrovne.
- Matematik 5. úrovne vyrieši za deň 2-násobok toho, čo matematik 4. úrovne, t. j. 4-násobok toho, čo matematik 3. úrovne, t. j. 8-násobok toho, čo matematik 2. úrovne.

3 matematici 5. úrovne vyriešia za deň toľko, čo $3 \cdot 8$ čiže 24 matematikov 2. úrovne. To je podľa zadania o 1000 úloh viac, než vyriešia 4 matematici 2. úrovne. Teda $24 - 4$ čiže 20 matematikov 2. úrovne vyrieši za deň 1000 úloh.

Jeden matematik 2. úrovne teda vyrieši za deň $1000 : 20$ čiže 50 úloh.

Hodnotenie:

2 body za porovnanie matematikov rôznych úrovní; 2 body za pomocné výpočty; 2 body za výsledok.

Vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže