MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z8

1 Počítačový program vypisoval po riadkoch čísla tvorené ciframi od 1 do 9. Cifry boli použité opakovane v prirodzenom poradí. Na každom riadku bolo o jednu cifru viac ako na riadku predchádzajúcom, na prvom riadku bola 1:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 12 \\ 123 \\ \vdots \\ 123456789 \\ 1234567891 \\ 12345678912 \\ \vdots \end{array}$$

Výpis bol ukončený číslom na 2024. riadku.

Zistite, na koľkých riadkoch boli čísla deliteľné

a) tromi,

b) štyrmi.

(Patrik Bak)

Riešenie:

V oboch prípadoch najprv zistíme, ako sa príslušná vlastnosť medzi postupne tvorenými číslami opakuje:

a) Číslo je deliteľné 3 práve vtedy, keď je jeho ciferný súčet deliteľný 3. Do ciferných súčtov prispievajú opakovane čísla od 1 do 9 a tie majú po delení 3 zvyšky opakovane 1, 2, 0. Vo vytvorených číslach sa tak zvyšok po delení ciferného súčtu 3 opakuje po trojiciach takto:

$$1, 0, 0, \quad 1, 0, 0, \quad \dots$$

V každej takej trojici sú 2 čísla deliteľné 3.

Najbližší násobok 3 menší ako 2024 je $3 \cdot 674$ čiže 2022. Teda na prvých 2022 riadkoch je $674 \cdot 2$ čiže 1348 čísel deliteľných 3 (674 trojíc po 2 číslach). Číslo na 2023. riadku deliteľné 3 nie je, číslo na 2024. riadku deliteľné 3 je.

Čísla deliteľné 3 sú teda na 1349 riadkoch.

b) Číslo je deliteľné 4 práve vtedy, keď je jeho posledné dvojčíslie deliteľné 4. Vo vytvorených číslach sa posledné dvojčíslia opakujú takto:

$$1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, \quad 91, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, \quad 91, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, \quad \dots$$

Až na úplne prvé číslo, ktoré je jednociferné, sa posledné dvojčíslia tvorených čísel opakujú po 9. V každej devätici sú dve čísla deliteľné 4, a to 12 a 56.

Najbližší násobok 9 menší ako 2024 je $9 \cdot 224$ čiže 2016. Teda na prvých 2016 riadkoch je $22 \cdot 2$ čiže 448 čísel deliteľných 4 (224 devätíc po 2 číslach). Na zvyšných 8 riadkoch sú koncové dvojčíslia 91, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, medzi ktorými sú 2 deliteľné 4, a to opäť 12 a 56.

Čísla deliteľné 4 sú teda na $448 + 2$ čiže 450 riadkoch.

Poznámka:

Aj v prípade b) je možné sledovať postupnosť zvyškov, avšak po delení 4. Tie sa pri tvorených číslach opakujú po deväticiach takto:

$$1, 0, 3, 2, \quad 1, 0, 3, 2, \quad \dots$$

V každej takej devätici je jedno číslo deliteľné 4. Ďalší postup by bol podobný vyššie uvedenému.

Hodnotenie:

V každom z oboch prípadov dajte 1 bod za odhalenie opakujúceho sa vzoru; 1 bod za výsledok; 1 bod za kvalitu komentára.

2 Medzi hračkami v obchode sú iba lode a autá. Lode tvoria štvrtinu hračiek. 75 % lodí a 40 % áut je červených. Červených hračiek je o 10 menej ako tých s inou farbou.

Koľko hračiek je v obchode?

(Eva Semerádová)

Riešenie:

Pomerné zastúpenie červených lodí medzi všetkými hračkami je $\frac{75}{100} \cdot \frac{1}{4}$ čiže $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$ čiže $\frac{3}{16}$.

Pomerné zastúpenie červených áut medzi všetkými hračkami je $\frac{40}{100} \cdot \frac{3}{4}$ čiže $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$ čiže $\frac{3}{10}$.

Pomerné zastúpenie červených hračiek medzi všetkými je preto $\frac{3}{16} + \frac{3}{10}$ čiže $\frac{15+24}{80}$ čiže $\frac{39}{80}$. Počet všetkých hračiek je teda deliteľný 80.

Ak by všetkých hračiek bolo 80, bolo by červených 39 a ostatných 41. V takom prípade by červených hračiek bolo o 2 menej ako tých s inou farbou. Červených je však o 10 menej ako ostatných a $10 : 2 = 5$. Teda všetkých hračiek je $5 \cdot 80$ čiže 400.

Poznámka:

Úvahu záverečnej časti riešenia možno nahradiť rovnicou

$$\frac{39}{80}h = \frac{41}{80}h - 10,$$

kde h označuje počet hračiek. Úpravami dostávame $\frac{2}{80}h = 10$, a teda $h = 400$.

Hodnotenie:

3 body za pomerné zastúpenie červených hračiek medzi všetkými hračkami; 3 body za počet hračiek.

---

3 Zostrojte deltoid $ABCD$ so stranami AB a AD dĺžky 11 cm, stranami CB a CD dĺžky 6 cm a uhlopriečkou AC dĺžky 15 cm. Nájdite aspoň jedno jeho rozdelenie na štyri štvoruholníky tak, aby dva z nich boli deltoidy a druhé dva zhodné kosoštvorce. Konštrukciu opíšte a zdôvodnite.

(*Deltoidom* nazývame taký konvexný štvoruholník, ktorý má dve dvojice zhodných susedných strán.)

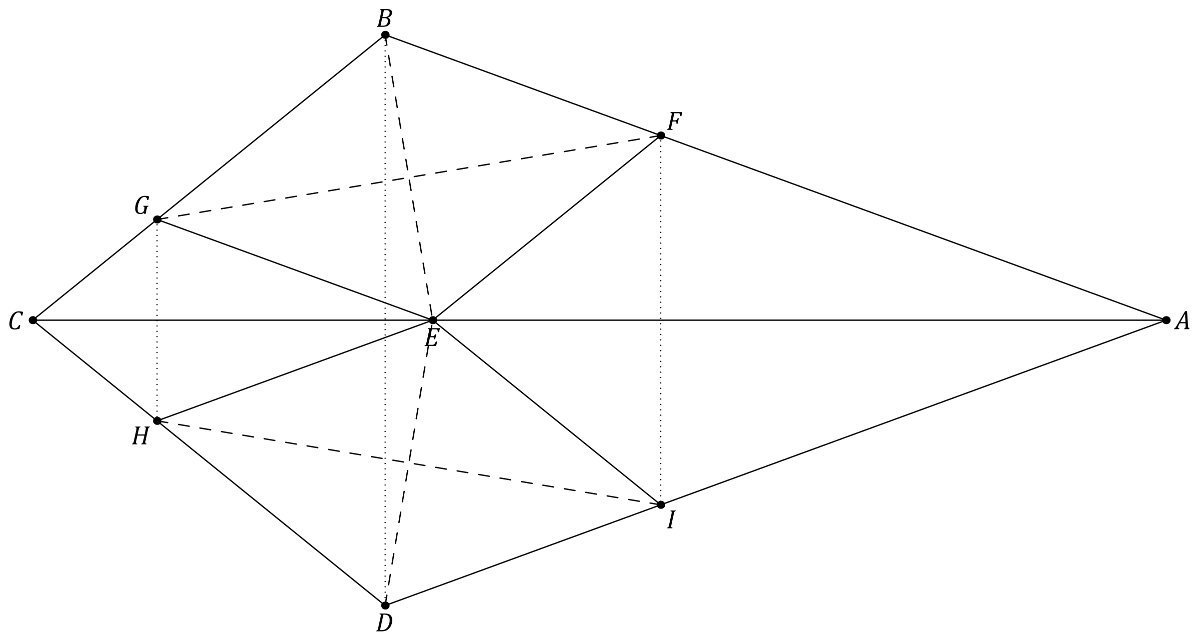
(Karel Pazourek)

Riešenie:

Pri rozbore úlohy využijeme to, že deltoid je osovo súmerný podľa jednej svojej uhlopriečky, a teda má navzájom kolmé uhlopriečky. Kosoštvorec je teda špeciálny deltoid, ktorý má všetky strany navzájom zhodné a je súmerný podľa oboch uhlopriečok.

Deltoid $ABCD$ zo zadania je osovo súmerný podľa uhlopriečky AC. Delenie deltoidu opíšeme pomocou bodov E, F, G, H, I takých, že E leží na uhlopriečke AC, body F a G ležia na stranách AB, resp. BC a body H a I sú osovo súmerné vzhľadom na G, resp. F podľa priamky AC. Nezávisle na polohe bodu E na uhlopriečke AC sú štvoruholníky $AFEI$ a $EGCH$ deltoidy a štvoruholníky $EFBG$ a $EHDI$ sú zhodné.

V kosoštvorci sú každé dva protiľahlé vnútorné uhly zhodné. Keďže uhly BCD a BAD zhodné nie sú, štvoruholníky $AFEI$ a $EGCH$ nemôžu byť zhodné kosoštvorce. Uvažujeme teda o takom delení, aby zhodnými kosoštvorcami boli štvoruholníky $EFBG$ a $EHDI$. Vzhľadom na to, že uhlopriečky v kosoštvorci sú jeho osami súmernosti, je také delenie určené jednoznačne – v kosoštvorci $EFBG$ je uhlopriečka BE osou uhla ABC a uhlopriečka GF je osou úsečky BE, v kosoštvorci $EHDI$ je to analogicky.



Konštrukcia deltoidu:

1. úsečka AC dĺžky 15 cm,
2. kružnica so stredom A a polomerom 11 cm,
3. kružnica so stredom C a polomerom 6 cm,
4. body B a D ako priesečníky kružníc z 2. a 3..

Konštrukcia delenia:

5. os uhla ABC,
6. bod E ako priesečník priamky z 5. s úsečkou AC,
7. os úsečky BE,
8. body F a G ako priesečníky priamky z 7. so stranami AB, resp. BC,
9. kolmice na priamku AC idúce bodmi F a G,
10. body H a I ako priesečníky kolmíc z 9. so stranami CD, resp. DA,
11. štvoruholníky $AFEI$, $EGCH$, $EFBG$, $EHDI$.

Poznámka:

Uvedená konštrukcia je odvodená z predchádzajúceho rozboru úlohy. V útvare sú ďalšie vzťahy, ktoré je tiež možné pri konštrukcii použiť. Napr. platí, že body F, G, H, I ležia na kružnici so stredom v bode E.

Hodnotenie:

3 body za rozbor úlohy a určenie podstatných vzťahov; 1 bod za konštrukciu deltoidu $ABCD$; 2 body za konštrukciu delenia.

Na zisk plného počtu bodov v súlade so zadaním nie je potrebné vysvetľovať, či existuje iné riešenie.

Vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže