MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Riešenia úloh krajského kola kategórie C

1 Pre každé zo 6 po sebe idúcich prirodzených čísel väčších ako 1 určíme najmenšie prvočíslo, ktoré ho delí, a potom týchto 6 prvočísel sčítame. Môže nám vyjsť

a) 23,

b) 25?

(Eliška Macáková)

Riešenie 1:

Medzi každými 6 po sebe idúcimi číslami sú práve 3 párne (tie do súčtu prispejú 3-krát prvočíslom 2) a práve 2 deliteľné 3, z ktorých jedno je nepárne (to prispeje prvočíslom 3) a druhé je párne (jeho príspevok prvočíslom 2 sme už započítali). Zvyšné 2 z týchto 6 čísel prispejú prvočíslami p a q, z ktorých každé je väčšie ako 3.

a) Jediné prvočísla p a q väčšie ako 3, pre ktoré platí $2+2+2+3+p+q=23$, čiže $p+q=14$, sú 7 a 7. To by však znamenalo, že medzi 6 po sebe idúcimi číslami sú 2 deliteľné 7. Takáto situácia nastať nemôže, pretože dva rôzne násobky 7 sa líšia najmenej o 7. Súčet 23 teda vyjsť nemôže.

b) Vyhovuje napríklad šestica čísel $(121, 122, 123, 124, 125, 126)$, ktorých najmenšie prvočíselné delitele sú postupne $(11, 2, 3, 2, 5, 2)$, takže naozaj dávajú požadovaný súčet 25.

Poznámka:

Opíšeme, ako hľadať čísla v časti b). Využijeme na to úvahy z úvodu nášho riešenia. Jediné prvočísla p a q väčšie ako 3, pre ktoré platí $2+2+2+3+p+q=25$, čiže $p+q=16$, sú 5 a 11. V hľadanej šestici sa tak musí nachádzať číslo, ktorého najmenší prvočíselný deliteľ je 11.

Ak zaradíme do šestice rovno číslo 11, budú v nej z násobkov 5 prítomné čísla 10 alebo 15 (môžu tam byť aj obe, ale žiadne iné). Ani jedno z týchto dvoch čísel však nemôže prispieť prvočíslom 5, pretože majú menšie prvočíselné delitele, a to 2, resp. 3.

Druhé najmenšie číslo, ktoré môže prispieť prvočíslom 11, je 11^2 čiže 121. V jeho „okolí“ už nájdeme vyhovujúcich 6 čísel. Keďže $119 = 7 \cdot 17$, toto číslo zaradiť nemôžeme. Prichádza tak do úvahy šestica začínajúca číslom 120 alebo šestica začínajúca číslom 121, obe (s číslom 125 čiže 5^3) vyhovujú.

Pokyny:

Časť a) je hodnotená 3 bodmi, časť b) tiež 3 bodmi.

Neúplné riešenia hodnoťte nasledovne:

A1 Konštatovanie, že v každej šestici po sebe idúcich čísel sa nachádzajú 3 párne čísla, ktoré prispejú 3-krát prvočíslom 2: 1 bod.

A2 Konštatovanie, že v každej šestici po sebe idúcich čísel sa nachádza jedno nepárne číslo deliteľné 3, ktoré prispeje prvočíslom 3: 1 bod.

A3 Zdôvodnenie, prečo prípad $p=q=7$ nie je možný: 1 bod.

B1 Nájdenie ľubovoľnej vyhovujúcej šestice v časti b): 3 body.
Tolerujte, ak je namiesto overenia iba konštatované, že navrhnutá šestica „zrejme“ vyhovuje.

B2 Hľadanie vyhovujúcej šestice v časti b) v „okolí“ čísla 121 (prípadne inej vhodnej mocniny prvočísla 11 alebo 5), ktoré pre numerickú chybu skončí neúspešne: 2 body.

B3 Pozorovanie, že v časti b) je potrebné nájsť prvočísla p a q väčšie ako 3 také, že $p+q=16$: 1 bod.

Celkovo potom dajte súčet bodov z A1, z A2, z A3 a maxima z počtov bodov z B1, z B2 a z B3.

---

2 Na tabuli sú napísané štyri čísla $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$. V každom kroku jedno číslo z tabule zotrieme a nahradíme ho súčinom niektorých dvoch zo zvyšných troch čísel. Zistite, či je možné postupovať tak, aby po niekoľkých krokoch boli na tabuli len celé čísla.

(Josef Tkadlec)

Riešenie:

Je to možné, a to napríklad takto:

1 Škrtneme $\sqrt{14}$ a nahradíme ho súčinom $\sqrt{11}$ a $\sqrt{12}$, t. j. $\sqrt{132}$.
Na tabuli tak budú čísla $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{132}$.

2 Škrtneme $\sqrt{13}$ a nahradíme ho súčinom $\sqrt{11}$ a $\sqrt{12}$, t. j. $\sqrt{132}$.
Na tabuli tak budú čísla $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{132}$, $\sqrt{132}$.

3 Škrtneme $\sqrt{12}$ a nahradíme ho súčinom $\sqrt{132}$ a $\sqrt{132}$, t. j. 132.
Na tabuli tak budú čísla $\sqrt{11}$, 132, $\sqrt{132}$, $\sqrt{132}$.

4 Škrtneme $\sqrt{11}$ a nahradíme ho súčinom $\sqrt{132}$ a $\sqrt{132}$, t. j. 132.
Na tabuli tak budú čísla 132, 132, $\sqrt{132}$, $\sqrt{132}$.

5 Škrtneme $\sqrt{132}$ a nahradíme ho súčinom 132 a 132, t. j. 17424.
Na tabuli tak budú čísla 132, 132, 17424, $\sqrt{132}$.

6 Škrtneme $\sqrt{132}$ a nahradíme ho súčinom 132 a 132, t. j. 17424.
Na tabuli tak budú čísla 132, 132, 17424, 17424, všetky sú celé.

Pokyny:

Plný počet 6 bodov dajte tým riešeniam, z ktorých je jasné, ako sa má každý krok vykonať, aby sme nakoniec dostali štvoricu celých čísel.

Neúplné riešenia hodnoťte nasledovne:

A1 Tvrdenie, že celé čísla sú dosiahnuteľné, bez snahy vysvetliť, akým spôsobom: 0 bodov.

A2 Rozklad čísel na prvočinitele a/alebo ich čiastočné odmocnenie: 0 bodov.

A3 Opis série krokov, po ktorých získame dve rovnaké čísla: 1 bod.

A4 Opis série krokov, po ktorých získame jedno celé číslo a tri necelé čísla: 2 body.

A5 Opis série krokov, po ktorých získame dve celé čísla a dve necelé čísla: 4 body.

A6 Hypotéza, že štyri celé čísla sú dosiahnuteľné, so slovným opisom krokov, z ktorého je jasný zámer, avšak v nejakom kroku tento opis nemá jednoznačnú interpretáciu a niektorá z možných interpretácií nevedie k cieľu: 5 bodov.

B1 Myšlienka, že len čo získame dve *celé* čísla, ľahko potom dôjdeme k cieľu: 2 body.

B2 Myšlienka, že len čo získame dve *rovnaké* čísla, ich súčin bude celé číslo: 2 body.

Celkovo potom dajte maximum z počtov bodov z A5, z A6 a zo súčtu bodov z B1 a maxima z počtov bodov z B2, z A3 a z A4.

Čiastočné body dajte aj v prípade, že v riešení je konštatované, že všetky štyri celé čísla sú (asi) nedosiahnuteľné. Pokiaľ však riešiteľ konštatuje, že nedosiahnuteľnosť štyroch celých čísel svojím postupom dokázal, dajte najviac 3 body.

---

3 Nech $ABCD$ je obdĺžnik taký, že platí $|AB| : |BC| = 2 : 1$. Nech $KLMN$ je obdĺžnik taký, že platí $|KL| : |LM| = 3 : 1$ a body K, L, M, N ležia postupne na stranách AB, BC, CD, DA. Nech $WXYZ$ je obdĺžnik taký, že body W, X, Y, Z ležia postupne na stranách KL, LM, MN, NK a jeho strany sú rovnobežné so stranami obdĺžnika $ABCD$. Vypočítajte hodnotu $|XY| : |YZ|$.

(Pavel Calábek)

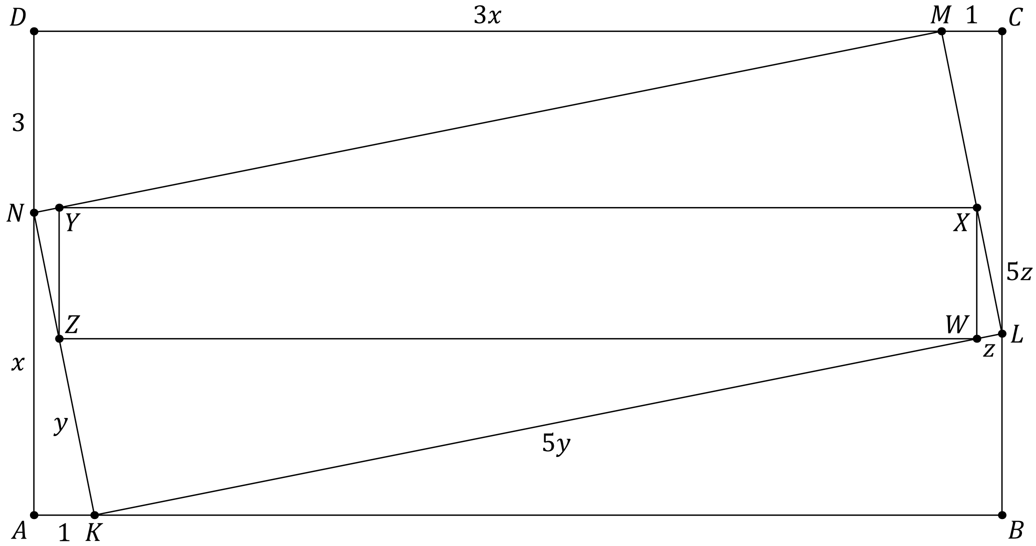
Riešenie:

Úloha úzko nadväzuje na úlohu z domáceho kola s rovnako zadanými obdĺžnikmi $ABCD$ a $KLMN$. V priebehu jej riešenia sme odvodili poznatok, že štyri pravouhlé trojuholníky ANK, DMN, CLM, BKL sú navzájom podobné, pritom každý z nich má dĺžky odvesien v pomere $5 : 1$, konkrétne $|AN| : |AK| = 5 : 1$. Riešitelia krajského kola sa môžu na tento výsledok odvolať, uveďme však aj teraz jeho odvodenie. Postup sa nám totiž bude hodiť na obdobné posúdenie dvojice obdĺžnikov $KLMN$ a $WXYZ$.

Avizovaná podobnosť pravouhlých trojuholníkov ANK, DMN, CLM, BKL, ktoré obklopujú obdĺžnik $KLMN$, vyplýva podľa vety uu zo zhodností ich vnútorných uhlov. Napríklad uhly KNA a DNM sa dopĺňajú do 90°, rovnako ako uhly DNM a NMD, odkiaľ dostávame zhodnosť uhlov KNA a NMD. Analogicky sa zdôvodnia aj ostatné potrebné zhodnosti uhlov.

Ďalej sme v riešení úlohy určili pomery podobností spomínaných štyroch trojuholníkov: Trojuholníky ANK a CLM sú dokonca zhodné (majú totiž zhodné prepony), oproti nim majú trojuholníky DMN a BKL strany 3-krát dlhšie (3-krát dlhšie sú totiž podľa zadania ich prepony). Pri voľbe jednotky dĺžky $|AK|$ a označení $x = |AN|$ tak máme $|CM| = 1$, $|DN| = 3$ a $|DM| = 3x$, a teda $|AB| = |CD| = 3x + 1$ a $|BC| = |AD| = x + 3$. Dosadením do zadaného vzťahu $|AB| : |BC| = 2 : 1$ dostaneme rovnicu $(3x + 1) = 2(x + 3)$, z ktorej máme $x = 5$. Preto naozaj platí napríklad $|AN| : |AK| = 5 : 1$. Týmto uzatvárame pripomenutie postupu z domáceho kola.

Teraz vyššie vykonané úvahy využijeme pre dvojicu obdĺžnikov $KLMN$ a $WXYZ$. Znovu tu máme štvoricu podobných pravouhlých trojuholníkov KWZ, LXW, MYX, NZY, obklopujúcich obdĺžnik $WXYZ$. Hľadaná hodnota $|XY| : |YZ|$, zapísaná ako $|WZ| : |XW|$, je tak vlastne pomerom dĺžok prepôn dvoch podobných trojuholníkov KWZ a LXW. Nájdeme ju ďalej ako pomer $|KZ| : |LW|$ dĺžok zodpovedajúcich si odvesien týchto dvoch trojuholníkov.



Zo zadania vyplýva, že strana AB obdĺžnika $ABCD$ je rovnobežná so stranou ZW obdĺžnika $WXYZ$, pretože je zrejme vylúčené, aby platilo $AB \parallel ZY$. Preto sú striedavé uhly KWZ a BKL zhodné, takže pravouhlé trojuholníky KWZ a BKL sú podobné podľa vety *uu*. Na obrázku je tak dokonca osem navzájom podobných pravouhlých trojuholníkov, každý s dĺžkami odvesien v skôr určenom pomere $5 : 1$.

Pri označení $y = |KZ|$ a $z = |LW|$ tak máme $|KW| = 5y$ a $|LX| = 5z$. To dáva $|KL| = 5y + z$ a $|LM| = 5z + y$ (lebo $|MX| = |KZ|$ zo zhodnosti trojuholníkov MYX a KWZ). Podmienku $|KL| : |LM| = 3 : 1$ teda môžeme prepísať ako rovnosť $5y + z = 3(5z + y)$, z ktorej vyplýva $y = 7z$. Dostávame tak

$$|XY| : |YZ| = |WZ| : |XW| = |KZ| : |LW| = y : z = 7 : 1.$$

Pokyny:

Za úplne riešenie treba považovať aj také, keď poznatky z A1 a A3 sú označené za známe (z domáceho kola) a poznatok z A2 za analógiu poznatku z A1 (existujú však úplné postupy, ktoré poznatok z A3 nevyužívajú priamo, ale skryto v nejakej rovnici). Neúplné riešenia hodnoťte nasledovne, pritom body za A1, A2 a A3 dajte aj v prípade opísanom v predchádzajúcej vete:

- A1 Dôkaz podobnosti niektorých dvoch susedných trojuholníkov ANK, BKL, CLM, DMN (obklopujúcich obdĺžnik $KLMN$): 1 bod.
- A2 Dôkaz podobnosti niektorých dvoch susedných trojuholníkov KWZ, LXW, MYX, NZY (obklopujúcich obdĺžnik $WXYZ$): 1 bod.
- A3 Podložený výpočet pomeru dĺžok niektorých dvoch strán jedného trojuholníka z A1 (najčastejšie odvesien, keď vyjde $5 : 1$): 2 body.
- A4 Dôkaz podobnosti dvoch trojuholníkov, z ktorých jeden je uvedený v A1 a druhý v A2: 1 bod.
- B1 Podložené zostavenie jednej alebo viacerých lineárnych rovníc, ktoré umožňujú vypočítať pomer podobnosti medzi väčšími a menšími trojuholníkmi z A2: 5 bodov.

  Nestačí teda vypísať napríklad sústavu kvadratických rovníc, ktoré možno získať bez použitia podobnosti použitím Pytagorovej vety pre rôzne zastúpené pravouhlé trojuholníky.

Celkovo potom dajte maximum z počtu bodov z B1 a zo súčtu bodov z A4 a maxima z počtov bodov z A1, z A2 a z A3.

Tolerujte, ak riešiteľ zdôvodní podobnosť nejakej dvojice trojuholníkov a potom podobnosti, ktoré možno zdôvodniť rovnakým postupom, označí za analogické.

4 Určte počet usporiadaných štvoríc (a, b, c, d) čísel z množiny $\{1, \dots, 1000\}$ takých, že

$$ab = cd,$$
$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2.$$

(Ján Mazák)

Riešenie 1:

Všimnime si, že vďaka rovnostiam zo zadania platí

$$(a+b)^2 = (a^2+b^2) + 2ab = (c^2+d^2) + 2cd = (c+d)^2.$$

Keďže obe čísla $a+b$ a $c+d$ sú kladné, po odmocnení dostávame $a+b = c+d$.

Z rovností

$$(a-b)^2 = (a^2+b^2) - 2ab = (c^2+d^2) - 2cd = (c-d)^2$$

po odmocnení tentoraz dostávame $|a-b| = |c-d|$, takže nastane aspoň jeden z prípadov $a-b = c-d$ alebo $a-b = d-c$.

V obidvoch prípadoch môžeme získanú rovnosť sčítať s rovnosťou $a+b = c+d$, čím dostaneme v prvom prípade $2a = 2c$, t. j. $a = c$, a v druhom $2a = 2d$, t. j. $a = d$. Z rovnosti $a+b = c+d$ potom v prvom prípade vďaka $a = c$ platí $b = d$, a v druhom vďaka $a = d$ platí $b = c$. V každom prípade $\{a, b\} = \{c, d\}$, a preto každá vyhovujúca štvorica musí byť v tvare (a, b, a, b) alebo (a, b, b, a).

Všetky štvorice (a, b, a, b) aj (a, b, b, a) zrejme spĺňajú obe rovnosti zo zadania. Zostáva preto určiť počet týchto štvoríc. Ak platí $a = b$, ide o štvorice toho istého tvaru (a, a, a, a) a tých je 1 000. Ak, naopak, $a \neq b$, sú štvorice (a, b, a, b) a (a, b, b, a) rôzne. Keďže máme 1 000 možností na výber a a potom 999 možností na výber b, počet štvoríc takých, že $a \neq b$, je $2 \cdot 1\,000 \cdot 999$ čiže 1 998 000. Celkovo tak existuje práve 1 999 000 vyhovujúcich štvoríc.

Riešenie 2:

Z prvej zadanej rovnosti vyjadríme $d = ab/c$, čo dosadíme do druhej rovnosti, ktorú ďalej upravíme nasledovne:

$$\begin{gathered}
a^2 + b^2 = c^2 + (ab/c)^2, \\
c^2a^2 + c^2b^2 = c^4 + a^2b^2, \\
c^2a^2 - c^4 = a^2b^2 - c^2b^2, \\
c^2\left(a^2 - c^2\right) = b^2\left(a^2 - c^2\right), \\
\left(a^2 - c^2\right)\left(c^2 - b^2\right) = 0, \\
(a-c)(a+c)(c-b)(c+b) = 0, \\
(a-c)(c-b) = 0.
\end{gathered}$$

Podľa odvodenej rovnosti sa teda číslo c rovná niektorému z čísel a alebo b. Tomu druhému sa vďaka $d = ab/c$ potom rovná číslo d.

Znova sme došli k záveru, že každá vyhovujúca štvorica musí byť tvaru (a, b, a, b) alebo (a, b, b, a), pričom akákoľvek taká štvorica zadaniu zrejme vyhovuje. Štvoríc tvaru (a, b, a, b) je 1000^2 (pripúšťame aj možnosť $a = b$). Rovnako tak štvoríc tvaru (a, b, b, a) je 1000^2 (pripúšťame aj možnosť $a = b$). Keďže je však každá z 1000 štvoríc (a, a, a, a) započítaná 2-krát, vyhovujúcich štvoríc je práve $2 \cdot 1000^2 - 1000$ čiže 1 999 000.

Poznámka:

Zdôvodnenie, prečo každá vyhovujúca štvorica musí mať tvar (a, b, a, b) alebo (a, b, b, a), možno podať aj geometricky: Uvažujme dva pravouhlé trojuholníky, jeden s odvesnami dĺžok a a b, druhý s odvesnami dĺžok c a d. Podľa prvej zadanej rovnosti majú tieto dva trojuholníky rovnaké obsahy, podľa druhej rovnosti majú zhodné prepony. Majú tak aj zhodné výšky na preponu. Využime teraz známu konštrukciu pravouhlého trojuholníka podľa zadanej prepony a zadanej výšky. Vďaka súmernosti použitej Tálesovej kružnice podľa osi prepony sú naše dva trojuholníky zhodné. Preto platí $(a, b) = (c, d)$ alebo $(a, b) = (d, c)$, ako sme chceli ukázať.

Pokyny:

Neúplné riešenia hodnoťte nasledovne:

A0 Vyjadrenie jedného z čísel a, b, c, d z jednej rovnosti a dosadenie do druhej rovnosti: 0 bodov.

A1 Udeľte 2 body, ak riešiteľ splní čokoľvek z nasledujúceho:

- odvodenie niektorej z rovností $(a+b)^2 = (c+d)^2$, $a+b = c+d$ alebo $(a-b)^2 = (c-d)^2$;

- pozorovanie, že ak pevne zvolíme hodnotu súčinu ab, hodnota $a^2 + b^2$ klesá s tým, čím bližšie k sebe sú čísla a a b;
- označenie napríklad $x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$, $w = d^2$ a prevedenie pôvodných rovností na rovnosti $xy = zw$ a $x + y = z + w$.

A2 Odvodenie oboch rovností $(a + b)^2 = (c + d)^2$ a $(a - b)^2 = (c - d)^2$: 3 body.

A3 Vyjadrenie jednej neznámej z rovnice $ab = cd$ a dosadenie do druhej rovnice s vyjadreným zámerom riešiť kvadratickú rovnicu pre druhú mocninu vhodnej neznámej (v našom druhom riešení ide o kvadratickú rovnicu pre c^2 s koreňmi a^2, b^2): 3 body.

A4 Zdôvodnenie, prečo niektoré z čísel a a b je rovné niektorému z čísel c, d, prípadne odvodenie rovnosti, z ktorej to ihneď vyplýva, napríklad $(a^2 - c^2)(c^2 - b^2) = 0$ alebo $(a - c)(c - b) = 0$: 4 body.

Tento krok je možné tiež splniť vyriešením kvadratickej rovnice z A3.

A5 Dôkaz, že vyhovujúca štvorica musí byť v tvare (a, b, a, b) alebo (a, b, b, a) (nezáleží, či je záver sformulovaný pomocou štvoríc alebo je zapísaná alebo slovne popísaná rovnosť $\{a, b\} = \{c, d\}$): 5 bodov.

Tento dôkaz môže byť vykonaný postupmi z oboch riešení aj geometrickým postupom z poznámky.

B1 Pozorovanie, že rovnostiam zo zadania vyhovujú nielen štvorice tvaru (a, b, a, b), ale aj štvorice tvaru (a, b, b, a): 1 bod.

B2 Správne vyčíslenie počtu štvoríc tvarov (a, b, a, b) a (a, b, b, a) spolu: 1 bod.

Celkovo potom dajte súčet bodov z B2 a z maxima počtov bodov z A1, z A2, z A3, z A4, z A5 a z B1.