MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2023/2024

Riešenia úloh krajského kola kategórie B

1 Patrik vybral dve rôzne kladné celé čísla, každé napísal na 10 kariet a všetkých 20 kariet rozmiestnil po obvode kruhu. Všimol si, že každé číslo je teraz deliteľom súčtu dvoch čísel na susedných kartách. Dokážte, že na každých dvoch susedných kartách sú rôzne čísla.

(Josef Tkadlec)

Riešenie 1:

Uvažované čísla označme a a b.

Tvrdenie úlohy dokážeme sporom. Nech teda existujú dve susedné karty s rovnakým číslom, bez ujmy na všeobecnosti nech je to číslo a. Keďže je karát oboch druhov rovnaký počet, existujú aj dve susedné karty s číslom b.

Vyberme dve susedné karty s číslom a. Ak začneme od tejto dvojice putovať po kruhu jedným smerom, narazíme na číslo b (inak by v kruhu boli samé a). Len čo sa to stane, budeme mať susednú trojicu (a, a, b). Podľa zadania potom platí $a \mid a + b$, odkiaľ $a \mid b$.

Analogickou úvahou nájdeme trojicu (b, b, a), z ktorej dostaneme $b \mid a$. Pre prirodzené čísla a a b tak platí $a \mid b$ aj $b \mid a$, a teda $a = b$, čo je spor.

Poznámka:

Ukážme navyše, že pre čísla a a b spĺňajúce zadanie úlohy musí platiť buď $b = 2a$, alebo $a = 2b$. Vzhľadom na symetriu stačí v prípade $a < b$ dokázať $b = 2a$. Pri striedavom rozmiestnení čísel z trojice (a, b, a) máme $b \mid 2a$, takže $2a = kb$ pre vhodné prirodzené číslo k. Z predpokladu $a < b$ však vyplýva $kb = 2a < 2b$, odkiaľ $k < 2$, čiže $k = 1$, a preto $2a = kb = b$.

Pokyny:

Neúplné riešenia, ktoré sa zaoberajú prípadom, keď rozmiestnenie čísel a a b nie je striedavé, hodnoťte nasledovne:

- A1 Konštatovanie, že musia byť vedľa seba dve a aj dve b: 1 bod.
- A2 Konštatovanie, že musí existovať ako úsek (a, a, b) (alebo (b, a, a)), tak aj úsek (a, b, b) (alebo (b, b, a)): 3 body.
- A3 Korektné odvodenie oboch vzťahov $a \mid a + b$ a $b \mid a + b$: 4 body.
- A4 Dosiahnutie sporu s prípadnou drobnou argumentačnou chybou: 5 bodov.

Celkovo potom dajte maximum z počtu bodov z A1, z A3, z A3 a z A4.

---

2 Reálne čísla a, b, c, d spĺňajú rovnosti

$$\frac{a-b}{c+d} = \frac{a-c}{b+d} = \frac{b-c}{a+d}.$$

Dokážte, že tieto zlomky majú hodnotu 0.

(Zdeněk Pezlar)

Riešenie:

Tvrdenie dokážeme sporom. Nech je spoločná hodnota týchto zlomkov rôzna od 0, takže $a - b \neq 0$, $a - c \neq 0$, $b - c \neq 0$.

Upravujme prvú rovnosť:

$$\frac{a-b}{c+d} = \frac{a-c}{b+d},$$

$$(a-b)(b+d) = (a-c)(c+d),$$

$$ab + ad - b^2 - bd = ac + ad - c^2 - cd,$$

$$(ab - ac) - \left(b^2 - c^2\right) - (bd - cd) = 0,$$

$$a(b-c) - (b-c)(b+c) - d(b-c) = 0,$$

$$(b-c)(a-b-c-d) = 0,$$

$$a - b - c - d = 0.$$

Upravujme druhú rovnosť:

$$\frac{a-c}{b+d} = \frac{b-c}{a+d},$$
$$(a-c)(a+d) = (b-c)(b+d),$$
$$a^2 + ad - ac - cd = b^2 + bd - bc - cd,$$
$$\left(a^2 - b^2\right) - (ac - bc) + (ad - bd) = 0,$$
$$(a-b)(a+b) - c(a-b) + d(a-b) = 0,$$
$$(a-b)(a+b-c+d) = 0,$$
$$a+b-c+d = 0.$$

Sčítaním týchto dvoch medzivýsledkov dostávame

$$(a-b-c-d) + (a+b-c+d) = 0+0,$$
$$2a - 2c = 0,$$
$$a - c = 0,$$

čo je spor.

K úplnosti riešenia ešte treba dodať, že čísla a, b, c, d spĺňajúce zadanie existujú, a to napríklad $a = b = c = d = 1$.

Pokyny:

Neúplné riešenia hodnoťte takto:

- A1 Konštatovanie, že stačí dokázať rovnosť dvoch z troch čísel a, b, c: 1 bod.
- A2 Odvodenie jednej z rovností $a-b-c-d=0$ alebo $a+b-c+d=0$: 3 body.
- A3 Odvodenie oboch týchto rovností: 4 body.
- A4 Riešenie s drobným argumentačným nedostatkom: 5 bodov.
  Neuvedenie aspoň jednej vyhovujúcej štvorice tolerujte.

Celkovo potom dajte maximum z počtu bodov z A1, z A3, z A3 a z A4.

---

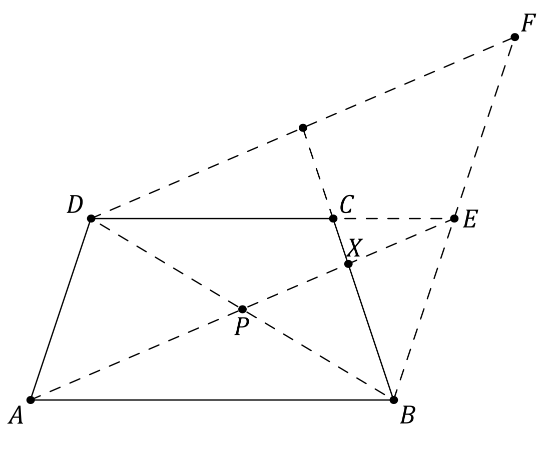
3 Nech $ABCD$ je lichobežník so základňami AB a CD, ktorých dĺžky sú postupne 6 a 4. Označme P stred uhlopriečky BD a E priesečník priamok AP a CD. Nech bod F je priesečník priamky BE a rovnobežky s priamkou AP prechádzajúcej vrcholom D. Dokážte, že priamka BC rozpoľuje úsečku DF.

(Jaroslav Švrček)

Riešenie 1:

Dokážeme, že bod C je ťažiskom trojuholníka BDF, z čoho už vyplynie, že priamka BC naozaj rozpoľuje jeho stranu DF.

Najskôr si všimneme, že z rovnobežnosti základní AB a CD vyplýva zhodnosť striedavých uhlov PAB a PED. Keďže zhodné sú aj vrcholové uhly APB a EPD, trojuholníky PAB a PED sú podobné, a teda vďaka rovnosti $|PB| = |PD|$ dokonca zhodné. Štvoruholník $ABED$ je teda rovnobežník. Preto platí $|DE| = |BA| = 6$. Bod E zrejme leží na polpriamke DC, takže $|DC| = 4$, čo spolu s $|DE| = 6$ znamená, že bod C leží na úsečke DE a pritom $|DC| = 2\,|CE|$.



Keďže bod P je stred strany BD trojuholníka BDF a $PE \parallel DF$, úsečka PE je jeho strednou priečkou, teda bod E je stred strany BF. Úsečka DE je preto ťažnicou, takže jej bod C je naozaj ťažiskom tohto trojuholníka.

Poznámka:

To, že E je stred úsečky BF, možno dokázať aj inak:

Keďže $ABED$ je rovnobežník, je aj štvoruholník $AEFD$ rovnobežník, a to vďaka rovnobežnosti svojich protiľahlých strán. Z oboch rovnobežníkov tak dostávame $|BE| = |AD| = |EF|$, čo znamená, že bod E je stred úsečky BF.

Riešenie 2:

Rovnako ako v prvom riešení dokážeme, že $|AP| = |EP|$ a že bod C leží na úsečke DE tak, že $|EC| = 2$. Keďže PE je stredná priečka trojuholníka BDF rovnobežná s jeho stranou DF, stačí dokázať, že priamka BC rozpoľuje úsečku PE. Potom totiž bude rozpoľovať aj úsečku DF, pretože trojuholník BDF je obrazom trojuholníka BPE v rovnoľahlosti so stredom B a koeficientom 2.

Označme preto X priesečník úsečiek BC a PE a ukážme, že naozaj platí $|PX| = |EX|$. Keďže trojuholník ECX je podobný trojuholníku ABX podľa vety uu, z rovnosti $|AB| = 3\,|EC|$ vyplýva tiež $|AX| = 3\,|EX|$. Odtiaľ $|AX| = \frac{3}{4}\,|AE|$ a $|EX| = \frac{1}{4}\,|AE|$, podobne z $|AP| = |EP|$ máme $|AP| = \frac{1}{2}\,|AE|$, a preto

$$|PX| = |AX| - |AP| = \frac{3}{4}\,|AE| - \frac{1}{2}\,|AE| = \frac{1}{4}\,|AE| = |EX|\,.$$

Pokyny:

Neúplné postupy hodnoťte nasledovne:

- A1 Konštatovanie, že tvrdenie úlohy bude dokázané, keď ukážeme, že bod C je ťažiskom trojuholníka BDF: 1 bod.
- B1 Určenie polohy bodu C na úsečke DE (napríklad rovnosťou $|CE| = 2$): 2 body.
- B2 Dôkaz poznatku, že bod E je stredom úsečky BF: 2 body.
- B3 Dokončenie dôkazu, že bod C je ťažiskom trojuholníka BDF: 1 bod.
- C1 Dôkaz zhodnosti trojuholníkov PAB a PED: 1 bod.
- C2 Dôkaz poznatku, že $ABED$ je rovnobežník: 2 body. Ak je tento poznatok iba konštatovaný (prípadne označený za zrejmý), dajte iba 1 bod.
- D1 Zavedenie priesečníka X úsečiek BC a PE so zámerom dokázať rovnosť $|PX| = |EX|$: 1 bod.
- D2 Dôkaz rovnosti $|AX| = 3\,|EX|$: 1 bod.
- D3 Dôkaz rovnosti $|PX| = |EX|$: 1 bod.
- D4 Dokončenie dôkazu použitím odvodeného poznatku, že priamka BC rozpoľuje strednú priečku PE trojuholníka BDF: 1 bod.

Celkovo potom dajte maximum z týchto hodnôt:

- súčet bodov z A1, z B1, z B2 a z B3;
- súčet bodov z A1, z B2, z B3 a maxima z bodov z C1 a z C2;
- súčet bodov z B1, z D1, z D2, z D3 a z D4.

---

4 Koľkými rôznymi spôsobmi môžeme vyplniť tabuľku 2024×2024 číslami 0 a 1 tak, aby súčty čísel v jednotlivých riadkoch boli navzájom rôzne a aj súčty čísel v jednotlivých stĺpcoch boli navzájom rôzne?

(Eliška Macáková)

Riešenie:

Ukážeme, že hľadaný počet je $2 \cdot (2024!)^2$. Každú správne vyplnenú tabuľku budeme ďalej nazývať len *tabuľkou*, výhodne označíme $n = 2024$ a vyriešime úlohu pre tabuľku $n \times n$ so všeobecne zvoleným n, keď počet správnych vyplnení vyjde $2(n!)^2$.

Keďže súčty čísel v riadkoch tabuľky sú podľa zadania navzájom rôzne, chýba medzi nimi jediná z $n+1$ možných hodnôt $0, 1, \ldots, n$ takých súčtov. To isté platí aj pre súčty čísel v jednotlivých stĺpcoch tabuľky. Z toho vyplýva, že ako medzi riadkovými, tak medzi stĺpcovými súčtami je zastúpené aspoň jedno z čísel 0 alebo n. Znamená to, že v tabuľke vždy nájdeme riadok so samými 0 alebo samými 1 aj takýto stĺpec. Zrejme však nemôžu byť v jednom smere niekde samé 0 a v druhom smere niekde samé 1. Práve jedno z čísel tak vypĺňa celý riadok aj celý stĺpec, takže riadkové aj stĺpcové súčty sú vždy buď $0, 1, \ldots, n-1$, alebo $1, 2, \ldots, n$.

Vysvetlíme teraz, prečo je tabuliek oboch druhov rovnako veľa: Ak v tabuľke jedného druhu všetky čísla navzájom vymeníme všetky 0 a 1 (t. j. každé zapísané číslo c zmeníme na číslo $1-c$), dostaneme zrejme tabuľku druhého druhu. Ľubovoľný riadkový aj stĺpcový súčet totiž zmení svoju hodnotu s na hodnotu $n-s$. Preto sa ďalej budeme venovať iba určeniu počtu tých tabuliek, ktorých riadkové aj stĺpcové súčty sú 0, 1, …, $n-1$.

Ďalej v dvoch etapách dokážeme, že ak jednotlivé súčty 0, 1, …, $n-1$ vopred ľubovoľne priradíme ako konkrétnym riadkom, tak konkrétnym stĺpcom, bude zodpovedajúca tabuľka existovať a bude jediná. Keďže na priradenie jednotlivých súčtov 0, 1, …, $n-1$ konkrétnym riadkom aj konkrétnym stĺpcom máme práve $n! \cdot n!$ čiže $(n!)^2$ možností, počet tabuliek so súčtami 0, 1, …, $n-1$ potom bude $(n!)^2$. Ako už vieme, rovnaký je aj počet tabuliek so súčtami 1, 2, …, n. Hľadaný celkový počet tabuliek tak bude naozaj rovný $2(n!)^2$.

Etapa 1:

Predpokladajme najskôr, že súčty 0, 1, …, $n-1$ sú v tomto poradí predpísané riadkom tabuľky zhora nadol a jej stĺpcom zľava doprava. Dokážeme indukciou, že pre tento špeciálny prípad je vyplnenie tabuľky jediné možné (a to také, že číslo 1 je práve v takých políčkach (i, j), že $i > j$):

1
- Tabuľka 1×1 má predpísané súčty (0) v jedinom riadku i v jedinom stĺpci, jej jediné políčko teda obsahuje 0.

0

- Tabuľka 2×2 má predpísané súčty (0, 1) v riadkoch zhora i v stĺpcoch zľava. Prvý riadok i prvý stĺpec teda obsahujú len 0, zvyšné pravé dolné políčko teda obsahuje 1.

0	0
0	1

2 Nech n je prirodzené číslo väčšie než 2.

Keďže v 1. riadku i v 1. stĺpci sú predpísané súčty 0, sú v nich samé 0. V n. riadku i v n. stĺpci sú predpísané súčty $n-1$, v oboch už však je jedna 0, takže v ich zvyšných políčkach sú 1.

Zvyšné políčka tvoria tabuľku $(n-2)\times(n-2)$ s predpísanými riadkovými i stĺpcovými súčtami $(0, \dots, n-1)$, takže aj tá je podľa indukčného predpokladu vyplnená jediným možným spôsobom.

Na obrázku je ilustratívny príklad pre prípad $n = 9$:

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1

Etapa 2:

Uvedomme si, že ak zmeníme v akejkoľvek vyplnenej tabuľke poradie jej riadkov, dôjde k rovnakej zmene poradia pôvodných hodnôt riadkových súčtov, zatiaľ čo stĺpcové súčty nezmenia ani svoje hodnoty a ani svoje poradie. Analogické pravidlo platí aj pre zmeny poradia stĺpcov.

Predpokladajme teraz, že súčty 0, 1, …, $n-1$ sú predpísané ako riadkom tabuľky v ľubovoľnom poradí, tak aj jej stĺpcom v ľubovoľnom poradí. Potom jej vyhovujúce vyplnenie dostaneme, keď v tabuľke vyplnenej ako na obrázku vyššie pozmeníme príslušnými spôsobmi najskôr poradie riadkov (ak je to vôbec potrebné) a potom (opäť len v prípade nutnosti) aj poradie stĺpcov. Takto zostrojené vyhovujúce vyplnenie je jediné, lebo z každej vyhovujúcej tabuľky musíme opačnými zmenami poradia riadkov a stĺpcov dostať jedinú špeciálnu tabuľku z etapy 1.

Riešenie 2:

Prvú časť pôvodného riešenia (o existencii tabuliek $n \times n$ dvoch druhov a rovnosti ich počtov) opakovať nebudeme, iba iným spôsobom odvodíme, že pri označení $P(n)$ pre počet všetkých tabuliek $n \times n$ so súčtami 0, 1, …, $n-1$, ktorý je, ako vieme, rovný počtu týchto tabuliek so súčtami 1, 2, …, n, platí $P(n) = (n!)^2$.

Všetky tabuľky $n \times n$ s daným n väčším než 1 a súčtami 0, 1, …, $n-1$ rozdelíme do $n \cdot n$ čiže n^2 skupín podľa toho, ktorý riadok a ktorý stĺpec je v tabuľke zostavený zo samých 0. Ak tento riadok a tento stĺpec z tabuľky vyškrtneme, zostane nám tabuľka $(n-1) \times (n-1)$, ktorej riadkové aj stĺpcové súčty sú čísla 1, 2, …,

$n-1$. Naopak z každej tabuľky $(n-1) \times (n-1)$ so súčtami 1, 2, …, $n-1$, ktorých je $P(n-1)$, zostavíme n^2 rôznych tabuliek $n \times n$ so súčtami 0, 1, …, $n-1$, keď v nej ľubovoľne (pred prvý riadok, medzi dva susedné riadky alebo za posledný riadok) urobíme miesto pre nový riadok, rovnako tak potom urobíme miesto pre nový stĺpec a nakoniec nový riadok aj stĺpec vyplníme samými 0. Preto platí $P(n) = n^2 P(n-1)$, čo spolu so zrejmým vzťahom $P(1) = 1$ už vedie k $P(n) = (n!)^2$.

Pokyny:

Neúplné riešenia hodnoťte nasledovne:

- A1 Hypotéza, že riadkové aj stĺpcové súčty vyplnenej tabuľky tvoria rovnakú skupinu čísel, a to buď 0, 1, …, 2023, alebo 1, 2, …, 2024: 1 bod.
- A2 Dôkaz hypotézy z A1: 1 bod. Ak dôkaz vychádza z poznatku, že riadkové aj stĺpcové súčty tvoria rovnakú skupinu čísel, ani tento poznatok nemožno považovať za zrejmý a musí byť zdôvodnený, najjednoduchšie úvahou o dvojakom sčítaní všetkých čísel tabuľky (po riadkoch a po stĺpcoch).
- B1 Určenie počtu možných rozmiestnení riadkových a stĺpcových súčtov (pre jeden z dvoch druhov tabuliek): 1 bod.
- B2 Hypotéza, že akákoľvek konkretizácia jednotlivých riadkových a stĺpcových súčtov vždy určuje práve jednu tabuľku: 1 bod.
- B3 Dôkaz hypotézy z B2: 1 bod.
- C1 Zdôvodnenie, prečo pre jedno riešiteľom vybrané rozloženie riadkových a stĺpcových súčtov existuje práve jedno vyplnenie tabuľky: 1 bod.
- C2 Zdôvodnenie, prečo z jednej tabuľky z C1 možno dostať permutáciami riadkov a stĺpcov všetky tabuľky jedného druhu: 1 bod.
- D1 Odvodenie vzťahov medzi počtami tabuliek $n \times n$ pre rôzne n (tabuliek či už jedného, alebo oboch možných druhov dokopy), ktoré umožňujú rekurentný výpočet výsledku: 3 body.
- E1 Uvedenie správneho výsledku: 1 bod.

Celkovo potom dajte súčet bodov z A1, z A2, z E1 a maxima z týchto hodnôt:

- súčet bodov z B1, z B2 a z B3;
- súčet bodov z C1, z C2 a z B1;
- počet bodov z D1.

Pri správnom postupe aj výsledku s menšími argumentačnými nedostatkami dajte 5 bodov, rovnako ako pri inak správnom postupe s numerickou chybou.