

2023/2024

73. ročník MO

Zadania úloh výberového sústredenia v kat. C

(Súťaž sa konala v utorok 7. mája 2024.)

1. Kladné celé číslo nazveme vyvážené, ak je počet rôznych prvočísel, ktoré toto číslo delia, rovný počtu cifier tohto čísla. Napríklad číslo  $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$  je vyvážené, ale  $275 = 5^2 \cdot 11$  vyvážené nie je. Dokážte, že existuje iba konečne veľa vyvážených čísel.

2. Na kružnici ležia body  $A, B, C, D$  a  $E$  v tomto poradí tak, že platí  $|\angle ABE| = |\angle BEC| = |\angle ECD| = 45^\circ$ . Dokážte, že platí

$$|AB|^2 + |CE|^2 = |BE|^2 + |CD|^2.$$

3.  $3m$  loptičiek očíslovaných  $1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, \dots, m, m, m$  je rozmiestnených do 8 krabičiek tak, že každé dve krabičky obsahujú loptičku s rovnakým číslom. Nájdite najmenšie  $m$ , pre ktoré to mohlo nastať.

4. Nech  $n \geq 2$  je kladné celé číslo a nech  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \langle 0, 1 \rangle$  sú reálne čísla. Nájdite najväčšiu možnú hodnotu najmenšieho z čísel

$$\begin{aligned} a_1 - a_1 a_2, \\ a_2 - a_2 a_3, \\ \vdots \\ a_n - a_n a_1. \end{aligned}$$

5. V rovnobežníku  $ABCD$  leží bod  $P$  tak, že platí  $|PC| = |BC|$ . Ukážte, že priamka  $BP$  je kolmá na priamku, ktorá spája stredy úsečiek  $AP$  a  $CD$ .