

2022/2023

72. ročník MO

Zadania úloh výberového sústredenia v kat. C

(Súťaž sa konala v utorok 9. mája 2023.)

1. V trojuholníku ABC je dĺžka ťažnice BM rovná polovici dĺžky strany BC . Dokážte, že $|\angle ABM| = |\angle BCA| + |\angle BAC|$.

2. Určte všetky dvojice celých čísel a a b , $b > 0$, takých, že riešenia kvadratických rovníc

$$x^2 - ax + a = b \quad \text{a} \quad x^2 - ax + a = -b$$

sú štyri po sebe idúce celé čísla.

3. Pre ktoré $n \geq 3$ existuje n priamok v rovine takých, že existuje aspoň $n - 2$ bodov, ktorými prechádzajú aspoň tri z týchto priamok?

4. Nech $S \subset \{1, 2, \dots, 2023\}$ je množina celých čísel taká, že neexistuje dvojica rôznych čísel z S , ktorých rozdiel by delil súčet nejakých dvoch rôznych čísel z S . Koľko najviac prvkov môže mať množina S ?

5. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla také, že absolútna hodnota rozdielu ľubovoľných dvoch je menšia ako 2. Dokážte, že

$$a + b + c < \sqrt{ab + 1} + \sqrt{ac + 1} + \sqrt{bc + 1}.$$