

2023/2024

73. ročník MO

Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia juniorov

(Súťaž sa konala 19. – 22. 5. 2024.)

Súťaž jednotlivcov:

I-1. Na začiatku sú na tabuli napísané čísla 1 a 2. V každom kroku si vyberieme kladné reálne číslo x a nahradíme dvojicu (a, b) čísel napísaných na tabuli dvojicou

$$\left(a + \frac{x}{b}, b + \frac{x}{a}\right).$$

Je možné (po konečnom počte krokov) dosiahnuť stav, v ktorom sú na tabuli napísané čísla 2 a 3? (Poľsko)

I-2. Pre koľko (neprázdnych) podmnožín množiny $\{1, 2, 3, 4, \dots, 11\}$ je súčin jej prvkov treťou mocninou kladného celého čísla? (Tomáš Bárta)

I-3. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, v ktorom $|AB| = |BD| = |DC|$ a $AB \perp BD \perp DC$. Označme M stred strany BC . Dokážte, že $|\angle BAM| + |\angle DCA| = 45^\circ$. (Jaroslav Švrček)

I-4. Celé čísla a, b, c spĺňajú $a + b + c = 1$ a $ab + bc + ca < abc$. Dokážte, že

$$ab + bc + ca < 2abc.$$

(Poľsko)

I-5. Pre kladné celé číslo n označme $S(n)$ súčet číslic v jeho desiatkovom zápise. Nájdite najmenšie kladné celé číslo n , pre ktoré platí $4S(n) = 3S(2n)$. (Eliška Macáková)

Súťaž družstiev:

T-1. Označme G ťžišče trojúhelníku ABC . Nechť D je čtvrtý vrchol rovnoběžníku $AGDB$. Dokážte, že $BG \parallel CD$. (Patrik Bak)

T-2. Mezi trojicemi (a, b, c) přirozených čísel splňujících

$$(a + 14\sqrt{3})(b - 14c\sqrt{3}) = 2024$$

určete tu s největší hodnotou a .

(Mária Dományová)

T-3. Wyznacz miary kątów wewnętrznych we wszystkich trójkątach równoramiennych, które można podzielić na dwa trójkąty równoramienne o rozłącznych wnętrzach.

(Jaroslav Švrček)

T-4. Ile jest dodatnich liczb całkowitych n mniejszych od 2024 i podzielnych przez $\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1$? Symbol $\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x .

Na przykład $n = 8$ spełnia dany warunek, gdyż 8 jest podzielne przez $\lfloor \sqrt{8} \rfloor - 1 = 2 - 1 = 1$, ale $n = 9$ go nie spełnia, gdyż 9 nie jest podzielne przez $\lfloor \sqrt{9} \rfloor - 1 = 2$.
(Patrik Bak)

T-5. Istnieje celé číslo $n \geq 1$ také, že keď cifry čísla 2^n , zapísaného v desiatkovej sústave, napíšeme v opačnom poradí, dostaneme inú celočíselnú mocninu dvojky?
(Poľsko)

T-6. V každom políčku obdĺžnikovej tabuľky je kladné celé číslo. Pre každé políčko tabuľky platí, že číslo v ňom je rovné celkovému počtu rôznych hodnôt v políčkach, ktoré sú s ním v rovnakom riadku alebo stĺpci (vrátane seba samého). Nájdite všetky tabuľky s takouto vlastnosťou.
(Poľsko)