

61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012

Riešenia úloh obvodného kola kategórie Z6

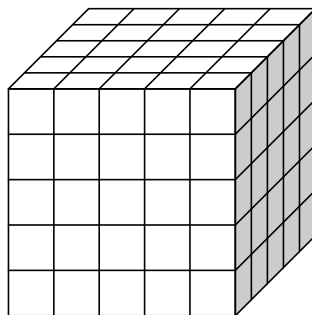
Informácia pre obvodnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideluje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín obvodných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu obvodného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu skmo@skmo.sk v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke skmo.sk/dokument.php?id=429 nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skráteno len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.

1. Danka a Janka dostali na narodeniny dve rovnako veľké biele kocky. Každá kocka bola zlepená zo 125 malých kociek, tak ako vidíte na obr. 1. Aby kocky rozoznali, dohodli sa, že ich omaľujú. Danka vzala štetec a tri celé steny svojej kocky omaľovala červenou farbou. Janka vzala štetec a tri celé steny svojej kocky ofarbila zelenou farbou. Po čase sa dievčatá rozhodli, že každú z kociek rozkrájajú na jednotlivé malé kocky. Keď to urobili, zistili, že počet kociek, ktoré majú aspoň jednu stenu červenú, je iný, ako počet kociek, ktoré majú aspoň jednu stenu zelenú. Zistite, aký je rozdiel týchto počtov.



Obr. 1

(E. Novotná)

Riešenie. Vieme, že každá z dievčat omaľovala tri steny svojej kocky. To možno urobiť iba dvoma spôsobmi:

1. Niektoré dve protiľahlé steny sú omaľované, potom je omaľovaná ešte jedna stena medzi nimi; uvažujme napr. hornú, dolnú a jednu bočnú stenu.
2. Žiadne dve protiľahlé steny nie sú omaľované, teda tri omaľované steny majú spoločný vrchol; uvažujme napr. hornú, prednú a bočnú stenu.

Ak sú počty omaľovaných malých kociek v jednotlivých prípadoch rôzne, museli dievčatá omaľovať kocky rôznymi spôsobmi. Pri každom spôsobe omaľovania zistíme, koľko malých kociek má omaľovanú aspoň jednu stenu. Budeme postupovať po vrstvách, vrstvy počítame zdola:

1. V prvej a piatej vrstve má aspoň jednu stenu omaľovanú všetkých 25 malých kociek, v druhej, tretej a štvrtej vrstve je omaľovaných vždy 5 malých kociek; celkom je v tomto prípade omaľovaných $25 + 5 + 5 + 5 + 25 = 65$ malých kociek.
2. V prvých štyroch vrstvách má aspoň jednu stenu omaľovanú vždy 9 malých kociek, v piatej vrstve je omaľovaných všetkých 25 malých kociek; celkom je v tomto prípade omaľovaných $9 + 9 + 9 + 9 + 25 = 61$ malých kociek.

Hľadaný rozdiel počtov omaľovaných malých kociek je $65 - 61 = 4$.

Návrh hodnotenia. 1 bod za určenie možných spôsobov omaľovania; 4 body za určenie počtov omaľovaných malých kociek v jednotlivých prípadoch; 1 bod za rozdiel.

Poznámka. Rozdiel možno zistiť aj bez určenia celkových počtov omaľovaných malých kociek v jednotlivých prípadoch. Pri takomto riešení hodnotíte druhú časť úlohy 1 až 5 bodmi podľa kvality zdôvodnenia (prvý bod je rovnaký).

2. Jurko zbiera podpisy známych športovcov a spevákov. Na podpisy si kúpil zvláštny zošit. Rozhodol sa, že podpisy budú vždy na každom liste zošita iba na prednej strane. Tieto strany postupne očísloval číslami 1, 3, 5, 7, 9, ... aby zistil, keby sa mu nejaký list zo zošita stratil. V celom zošite tak napísal dokopy 125 cifier. Zistite:

- Koľko mal Jurkov zošit listov.
- Koľko jednotiek napísal do zošita.

(M. Volfová)

Riešenie. Jednociferných nepárnych čísel je päť. Dvojciferných čísel je celkom $99 - 9 = 90$, z toho nepárnych je 45. S týmito číslami mohol Jurko očíslovať $5 + 45 = 50$ strán a použil by pri tom $5 + 2 \cdot 45 = 95$ cifier. Ostáva ešte použiť $125 - 95 = 30$ cifier. Tieto presne zodpovedajú prvým desiatim trojciferným nepárnym číslam od 101 do 119. Jurko celkom očísloval $5 + 45 + 10 = 60$ strán, zošit má teda 60 listov.

Cifra 1 je na mieste jednotiek celkom 12-krát (raz v každej desiatke: 1, 11, ..., 91, 101, 111). Na mieste desiatok sa cifra 1 vyskytuje 10-krát (päťkrát medzi číslami 11 a 19 a päťkrát medzi 111 a 119). Na mieste stoviek je cifra 1 tiež 10-krát (trojciferných čísel bolo napísaných práve desať). Jurko napísal celkom $12 + 10 + 10 = 32$ jednotiek.

Návrh hodnotenia. Po 3 bodoch za každú časť úlohy. (Úlohu možno riešiť aj postupným vypisovaním a počítaním cifier.)

3. Na nočný pochod dostali družiny Vlkov a Líšok po jednej rovnakej sviečke. Sviečky zapálili spoločne na štarte a vyrazili. Počas pochodu každý člen družiny Vlkov niesol sviečku takú dobu, za ktorú sa jej dĺžka skrátila na polovicu. Vlci dobehli do cieľa v momente, keď mal šiesty člen družiny podať sviečku siedmemu. Od toho okamihu ich sviečka celá dohorela o tri minúty. Líšky dobehli do cieľa za 2 hodiny a 57 minút.

- Ktorá družina bola v cieľi ako prvá?
- O koľko minút dobehla víťazná družina do cieľa skôr ako druhá družina?

(*Sviečka horí rovnomerne: za rovnaký čas vždy rovnaký kúsok.*) (M. Dillingerová)

Riešenie. Najskôr zistíme, ako dlho bežali Vlci. Šiesty člen predával sviečku siedmemu v okamihu, keď mala horieť ešte 3 minúty. Sám ju teda niesol tiež 3 minúty a od piateho člena ju preberal v okamihu, keď mala horieť ešte $3 + 3 = 6$ minút. Piaty člen ju teda niesol 6 minút a od štvrtého člena ju preberal v okamihu, keď mala horieť ešte $6 + 6 = 12$ minút. Takto môžeme postupovať až k prvému členovi:

člen č.	niesol sviečku (min)
7	0
6	3
5	6
4	12
3	24
2	48
1	96

Pochod Vlkom trval $96 + 48 + 24 + 12 + 6 + 3 = 189$ minút. (Alternatívne možno spočítať ako $96 + 96 - 3 = 189$.)

Líškam pochod trval $120 + 57 = 177$ minút.

Líšky teda boli v cieľi prvé, a to o $189 - 177 = 12$ minút skôr ako Vlci.

Návrh hodnotenia. 1 bod za postreh, že každý člen niesol sviečku tak dlho, ako dlho mala ešte horieť, keď ju predával ďalšiemu; 2 body za vyplnenú tabuľku alebo jej obdobu; 1 bod za určenie času pochodu Vlkov; po 1 bode za odpoveď na každú otázku zo zadania.

Za riešenie, v ktorom je iba nezdôvodnený záver, že v cieľi boli prvé Líšky, nedávajte žiadny bod.

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori: Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Marie Krejčová, Martin Mach, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Erika Novotná, Marta Volfová, Vojtěch Žádník

Recenzenti: Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Erika Novotná, Vojtěch Žádník

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012