61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012

Riešenia úloh obvodného kola kategórie Z7

Informácia pre obvodnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín obvodných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu obvodného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: `skmo.sk`. *Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu* `skmo@skmo.sk` *v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke* `skmo.sk/dokument.php?id=429` *nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.*

---

1. *Peter a Karol spolu hrali veľa partií dámy. Dohodli sa, že za výhru si hráč pripočíta 3 body, za prehru si 2 body odčíta a za remízu sa žiadne body nepripočítavajú ani neodčitujú. Petrova sestra chcela vedieť, koľko už Peter a Karol odohrali partií a kto vedie, ale dozvedela sa iba, že Peter šesťkrát vyhral, dvakrát remizoval a niekoľkokrát prehral a Karol má práve 9 bodov. Zistite, koľko partií chlapci hrali a kto práve teraz vedie.* (M. Volfová)

Riešenie. Karol musel vyhrať toľkokrát, aby mu po odčítaní 12 bodov za 6 prehier zostalo ešte 9 bodov. Na výhrach teda musel získať $9+12=21$ bodov, čomu zodpovedá 7 výhier. Peter teda sedemkrát prehral. Zo zadania ešte vieme, že dvakrát remizoval a šesťkrát vyhral, má teda celkom $6\cdot 3+2\cdot 0-7\cdot 2=4$ body.

Chlapci odohrali $6+2+7=15$ partií, vedie Karol.

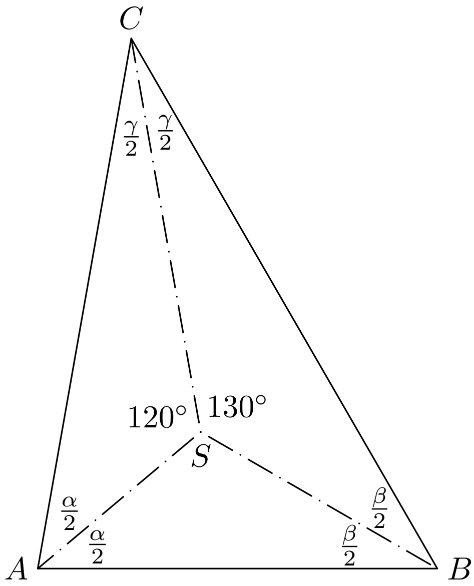
Návrh hodnotenia. 4 body za správnu úvahu o počte výhier Karola; 1 bod za zdôvodnený poznatok, že vedie Karol; 1 bod za stanovenie počtu odohraných partií.

Poznámka. Súťažiaci nemusia určovať Petrov bodový zisk. Poznatok, že vedie Karol, môžu totiž zdôvodniť aj porovnaním siedmich Karlových výhier so šiestimi Petrovými výhrami.

---

2. *V trojuholníku ABC sa osi jeho vnútorných uhlov pretínajú v bode S. Uhol BSC má veľkosť $130°$ a uhol ASC má $120°$. Zistite veľkosti všetkých vnútorných uhlov trojuholníka ABC.* (E. Patáková)

Riešenie. Označme vnútorné uhly v trojuholníku α, β a γ (obr. 1).



Obr. 1

Súčet vnútorných uhlov v ľubovoľnom trojuholníku je 180°. Preto aj v trojuholníku ASC platí

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} + 120^\circ = 180^\circ,$$

odkiaľ dopočítame

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} &= 60^\circ, \\ \alpha + \gamma &= 120^\circ. \end{aligned}$$

V trojuholníku ABC platí $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, odkiaľ teraz vieme vyjadriť uhol β:

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Podobne v trojuholníku BSC:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} + 130^\circ &= 180^\circ, \\ \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} &= 50^\circ, \\ \gamma + \beta &= 100^\circ. \end{aligned}$$

Keďže $\beta = 60^\circ$, musí byť $\gamma = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$ a napokon $\alpha = 120^\circ - 40^\circ = 80^\circ$ (alternatívne $\alpha = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$).

Návrh hodnotenia. 2 body za určenie súčtu $\alpha + \gamma = 120^\circ$, príp. $\gamma + \beta = 100^\circ$; 4 body za určenie veľkostí všetkých vnútorných uhlov.

3. *Trojciferné prirodzené číslo budeme nazývať párnomilné, ak obsahuje dve párne cifry a cifru* 1*. Trojciferné prirodzené číslo budeme nazývať nepárnomilné, ak obsahuje dve nepárne cifry a cifru* 2*. Zistite, koľko je všetkých trojciferných párnomilných a koľko nepárnomilných čísel.* (*E. Novotná*)

Riešenie. Najskôr určíme počet všetkých párnomilných čísel:

- Ak je cifra 1 na mieste stoviek, môže byť na mieste desiatok ľubovoľná párna cifra (0, 2, 4, 6, 8) a to isté platí pre miesto jednotiek; to je celkom $5 \cdot 5 = 25$ možností.
- Ak je cifra 1 na mieste desiatok, môže byť na mieste stoviek ľubovoľná nenulová párna cifra (2, 4, 6, 8) a na mieste jednotiek ľubovoľná párna cifra; to nám dáva ďalších $4 \cdot 5 = 20$ možností.
- Ak je cifra 1 na mieste jednotiek, môže byť na mieste stoviek ľubovoľná nenulová párna cifra a na mieste desiatok ľubovoľná párna cifra; to nám dáva ďalších $4 \cdot 5 = 20$ možností.

Celkový počet párnomilných čísel je $25 + 20 + 20 = 65$.

Nepárnomilné čísla obsahujú okrem cifry 2 iba nepárne cifry. Môžeme uvažovať rovnako ako pri počítaní párnomilných čísel, avšak tentoraz možno v každom prípade napočítať $5 \cdot 5 = 25$ možností (na každom voľnom mieste môže byť ľubovoľná nepárna cifra 1, 3, 5, 7, 9). Celkový počet nepárnomilných čísel je $3 \cdot 25 = 75$.

Návrh hodnotenia. 4 body za určenie počtu párnomilných čísel; 2 body za určenie počtu nepárnomilných čísel.

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori:	Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Marie Krejčová, Martin Mach, Eva Pataková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Erika Novotná, Marta Volfová, Vojtěch Žádník
Recenzenti:	Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Erika Novotná, Vojtěch Žádník
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012