61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012 *Riešenia úloh obvodného kola kategórie Z8*

<u>*Informácia pre obvodnú komisiu MO:*</u>

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín obvodných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu obvodného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: `skmo.sk`*. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu* `skmo@skmo.sk` *v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke* `skmo.sk/dokument.php?id=429` *nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.*

1. *Divadelný súbor uviedol počas sezóny tridsaťkrát „Večer plný improvizácie“. Filoména, obdivovateľka hlavného hrdinu, si na začiatku sezóny vypočítala, koľko by dokopy minula peňazí, keby chodila na každé predstavenie. Po niekoľkých predstaveniach však vstupné nečakane vzrástlo o 6 €. Neskôr získal súbor sponzora a túto novú cenu znížil o 8,50 €. Na konci sezóny Filoména mohla povedať, že nevynechala ani jedno predstavenie a na vstupné minula presne toľko, koľko si vypočítala na začiatku sezóny. Koľkokrát išla Filoména na predstavenie za vstupné v pôvodnej výške?* (L. Šimůnek)

Riešenie. Počet predstavení, na ktorých bolo vstupné zdražené o 6 €, označíme a. Filoména za ne oproti svojmu predpokladu utratila o $6a$ € viac. Po zlacnení bolo vstupné nižšie ako na začiatku sezóny, a to o $8{,}5-6 = 2{,}5$ €. Počet predstavení s týmto vstupným označíme b. Filoména za ne zaplatila o $2{,}5b$ € menej, ako pôvodne plánovala. Celková vydaná suma zodpovedá presne plánu, preto musí platiť

$$6a = 2{,}5b.$$

Neznáme a, b sú prirodzené čísla. Rovnicu upravíme na tvar, z ktorého bude zrejmý pomer týchto čísel:

$$\frac{a}{b} = \frac{2{,}5}{6} = \frac{5}{12}.$$

Neznáma a teda musí byť násobkom piatich a neznáma b musí byť zodpovedajúcim násobkom dvanástich ako v tabuľke:

a	5	10	15	…
b	12	24	36	…

Keďže podľa zadania nesmie súčet $a + b$ presiahnuť 30, do úvahy prichádza len prvá možnosť. Predstavení so zmenenou cenou vstupného bolo celkom $5 + 12 = 17$. Predstavení so vstupným v pôvodnej výške tak bolo $30 - 17 = 13$.

Návrh hodnotenia. 4 body za poznatok, že počty predstavení a a b sú v pomere $5 : 12$ (z toho 2 body udeľte podľa úplnosti komentára); 1 bod za diskusiu, že riešenie je jediné; 1 bod za správnu a jasne formulovanú odpoveď.

Poznámka. Dá sa zvoliť aj dlhší postup, pri ktorom do rovnice $6a - 2{,}5b = 0$ dosadzujeme za a postupne prirodzené čísla a vždy skúmame, či b vychádza tiež prirodzené číslo. Aj za takúto prácu možno udeliť plný počet bodov, ak je v nej ukázané, že úloha má jediné riešenie.

---

2. *Nájdite najmenšie také prirodzené číslo, že jeho polovica je deliteľná tromi, jeho tretina je deliteľná štyrmi, jeho štvrtina je deliteľná jedenástimi a jeho polovica dáva po delení siedmimi zvyšok* 5. (*E. Pataková*)

Riešenie. Ak je polovica čísla deliteľná tromi, tak číslo musí byť deliteľné číslami 2 a 3 súčasne. Z podobných dôvodov musí byť deliteľné aj číslami 3 a 4 a tiež číslami 4 a 11. Najmenší spoločný násobok všetkých týchto čísel je súčin $3 \cdot 4 \cdot 11 = 132$; hľadané číslo musí byť násobkom čísla 132. Polovica hľadaného čísla je teda násobkom čísla 66, zostáva už len preskúmať zvyšok po delení siedmimi:

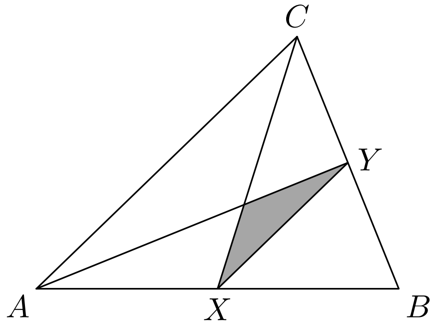
polovica hľadaného čísla	zvyšok po delení siedmimi
66	3
132	6
198	2
264	5

Najmenší násobok čísla 66, ktorý po delení siedmimi dáva zvyšok 5, je 264. Hľadané číslo je teda $2 \cdot 264 = 528$.

Návrh hodnotenia. 1 bod za zjednodušenie zadania (napr. že prvá informácia znamená deliteľnosť číslami 2 a 3); 3 body za nájdenie najmenšieho spoločného násobku 132 a interpretáciu, že hľadané číslo je násobkom tohto čísla, alebo jej obdobu (pojem „násobok“ nemusí byť explicitne uvedený); 2 body za nájdenie čísla 528 (z postupu musí byť zrejmé vylúčenie všetkých menších čísel).

---

3. *Je daný trojuholník ABC, ktorého náčrt vidíte na obr. 1. Na strane AB leží bod X a na strane BC leží bod Y tak, že CX je ťažnica, AY je výška a XY je stredná priečka trojuholníka ABC. Vypočítajte obsah trojuholníka vyznačeného na obrázku sivou farbou, ak obsah trojuholníka ABC je* $24\,\mathrm{cm}^2$. (*M. Dillingerová*)



Obr. 1

Riešenie. Keďže XY je stredná priečka trojuholníka ABC, musí byť Y stred strany BC, a teda úsečka AY nie je iba výška, ale aj ťažnica. Priesečník ťažníc CX a AY je ťažiskom trojuholníka ABC, tento bod označíme T.

Každá ťažnica rozdelí trojuholník na dva trojuholníky s rovnakým obsahom (takto vzniknuté trojuholníky majú spoločnú výšku na rovnako dlhé strany): AY je ťažnica trojuholníka ABC, preto

$$S_{ABY} = S_{ACY} = \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{24}{2} = 12\,(\mathrm{cm}^2),$$

a podobne XY je ťažnica trojuholníka ABY, preto

$$S_{AXY} = S_{BXY} = \frac{1}{2} S_{ABY} = \frac{12}{2} = 6\,(\mathrm{cm}^2).$$

Trojuholník AXY, ktorého obsah poznáme, pozostáva z trojuholníkov AXT a YXT. Tieto dva trojuholníky majú spoločnú výšku z bodu X, ich obsahy sú teda v rovnakom pomere, v akom je pomer dĺžok strán AT a TY, t. j. v pomere $2:1$ (ťažisko delí ťažnicu v pomere $2:1$). Obsah trojuholníka YXT je teda tretinový vzhľadom na obsah trojuholníka AXY, preto

$$S_{YXT} = \frac{1}{3} S_{AXY} = \frac{6}{3} = 2\,(\mathrm{cm}^2).$$

Návrh hodnotenia. 2 body za poznatok (vrátane zdôvodnenia), že AY je ťažnica v trojuholníku ABC; po 1 bode za obsahy trojuholníkov ABY a AXY; 2 body za výsledný obsah trojuholníka YXT (vrátane jeho odvodenia alebo zdôvodnenia).

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori:	Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Marie Krejčová, Martin Mach, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Erika Novotná, Marta Volfová, Vojtěch Žádník
Recenzenti:	Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Erika Novotná, Vojtěch Žádník
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012