

2009/2010
59. ročník MO

Zadania úloh školského kola kategórie A

(Súťaž sa konala v utorok 1. decembra 2009.)

1. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned}\sqrt{x - y^2} &= z - 1, \\ \sqrt{y - z^2} &= x - 1, \\ \sqrt{z - x^2} &= y - 1.\end{aligned}$$

(Radek Horenský)

2. Nájdite všetky možné hodnoty podielu

$$\frac{r + \varrho}{a + b},$$

pričom r je polomer kružnice opísanej a ϱ polomer kružnice vpísanej pravouhlému trojuholníku s odvesnami dĺžok a a b . (Tomáš Jurík)

3. Na tabuli sú napísané čísla $1, 2, \dots, 33$. V jednom kroku zvolíme niekoľko čísel napísaných na tabuli (aspoň dve), ktorých súčin je druhou mocninou prirodzeného čísla, zvolené čísla zotrieme a na tabuľu napíšeme druhú odmocninu z ich súčinu. Takto pokračujeme, až na tabuli ostanú iba také čísla, že súčin žiadnych z nich nie je druhou mocninou. Koľko najmenej čísel môže na tabuli ostať? (Peter Novotný)