2003/2004
53. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh výberového sústredenia*

(*Sústredenie sa konalo 18. – 24. 4. 2004.*)

1. Je daný trojuholník ABC a na strane BC bod D tak, že $|AD| > |BC|$. Bod E na strane AC je určený pomerom

$$\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|BD|}{|AD| - |BC|}.$$

Dokážte, že platí $|AD| > |BE|$.

2. Nájdite všetky ohraničené postupnosti $a_1, a_2, \ldots$ prirodzených čísel také, že platí

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{(a_{n-1}, a_{n-2})}$$

pre každé $n > 2$. ((k, ℓ) označuje najväčšieho spoločného deliteľa čísel k a ℓ.)

3. a) Anička má dve škatule, z ktorých v každej je 6 loptičiek označených číslami 1 až 6. Náhodne vyberie po jednej loptičke z každej škatule. Nech p_n označuje pravdepodobnosť, že súčet vybraných čísel je rovný n. Vypočítajte p_n pre všetky $n \in \mathbb{N}$.
b) Betka má tiež dve škatule a v každej 6 loptičiek označených (neznámymi) prirodzenými číslami. Čísla sa môžu opakovať, nemusia byť také isté v oboch škatuliach. Ak Betka vyberie náhodne po jednej loptičke z každej škatule, pravdepodobnosť, že súčet bude rovný n, je opäť p_n (rovnako ako u Aničky). Aké čísla sú na Betkiných loptičkách? Nájdite všetky možnosti.

4. Každý štvorček veľkého štvorca 50×50 je ofarbený jednou zo štyroch farieb. Ukážte, že existuje štvorček, ktorý má rovnakú farbu ako niektorý štvorček napravo, naľavo, hore i dole od neho (nie nutne susedný).

5. Na oblúku BC kružnice opísanej trojuholníku ABC, ktorý neobsahuje bod A, zvolíme bod P. Na polpriamkach AP, BP zvolíme postupne body X, Y tak, aby $|AC| = |AX|$, $|BC| = |BY|$. Ukážte, že priamky XY prechádzajú pre pohybujúci sa bod P pevným bodom.

6. Nech $\mathcal{S}$ je množina $2004^2 + 1$ prirodzených čísel väčších ako 1. Platí, že pre každé prirodzené číslo n existuje nejaké $s \in \mathcal{S}$ také, že $NSD(s, n) = 1$ alebo $NSD(s, n) = s$. Dokážte, že existujú $s, t \in \mathcal{S}$ také, že $NSD(s, t)$ je prvočíslo.

7. Pre prirodzené číslo n a reálne číslo c definujeme x_k rekurzívne: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ a

$$x_{k+2} = \frac{cx_{k+1} - (n-k)x_k}{k+1} \quad \text{pre } k \geqq 0.$$

Pre pevné n označme c najväčšie číslo, pre ktoré $x_{n+1} = 0$. Pre takto zvolené c nájdite predpis pre x_k iba za pomoci n a k pre $1 \leqq k \leqq n$.

8. Nech a, b, c sú nezáporné reálne čísla také, že $a + b + c = 1$. Nájdite maximum výrazu

$$a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{12abc}.$$

9. Daný je štvorsten taký, že guľa so stredom v bode O sa dotýka všetkých jeho šiestich hrán. Navyše štyri gule so stredmi vo vrcholoch štvorstena sa po dvoch zvonka dotýkajú a všetky štyri sa dotýkajú inej gule so stredom v bode O. Dokážte, že takýto štvorsten musí byť pravidelný.

10. Nech ABC je trojuholník. Na jeho stranách AB, AC ležia v tomto poradí body D, E tak, že priamka DE je rovnobežná s priamkou BC. Nech P je ľubovoľný vnútorný bod trojuholníka ADE a nech F, G sú postupne priesečníky priamky DE s priamkami BP a CP. Nech Q je druhý priesečník (rôzny od P) kružníc opísaných trojuholníkom PDG a PFE. Dokážte, že body A, P, Q ležia na priamke.

11. Dokážte, že ak n je prirodzené číslo také, že rovnica

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$$

má riešenie (x, y) v celých číslach, tak má táto rovnica aspoň tri takéto riešenia. Nájdite všetky jej riešenia pre $n = 2891$.

12. Bod P leží vnútri trojuholníka ABC. D, E a F sú päty kolmíc spustených z P postupne na strany BC, CA a AB. Predpokladajme, že platí

$$|AP|^2 + |PD|^2 = |BP|^2 + |PE|^2 = |CP|^2 + |PF|^2.$$

Označme I_A, I_B a I_C stredy kružníc pripísaných ku stranám trojuholníka ABC. Dokážte, že P je stred kružnice opísanej trojuholníku $I_AI_BI_C$.

13. Každé prirodzené číslo a podstúpi nasledovnú procedúru pre získanie hodnoty $d = d(a)$:
(i) poslednú cifru čísla a presunieme na začiatok, dostaneme tak číslo b;
(ii) umocníme b na druhú, dostaneme tak číslo c;
(iii) prvú cifru čísla c presunieme na koniec, dostaneme číslo d.
(Všetky čísla sú zapísané v desiatkovej sústave.) Napríklad pre $a = 203$ dostaneme $b = 320$, $c = 102400$ a $d = 024001 = 24001 = d(203)$. Nájdite všetky čísla a, pre ktoré $d(a) = a^2$.

14. Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že pravidelný šesťuholník sa dá rozdeliť na n rovnobežníkov, ktoré majú všetky rovnaký obsah.

15. Nech n a r sú kladné celé čísla a nech A je podmnožina množiny mrežových bodov (body s celočíselnými súradnicami) v rovine, taká, že ľubovoľný kruh (bez hraničnej kružnice) s polomerom r obsahuje bod z množiny A. Dokážte, že ak ľubovoľne ofarbíme množinu A s n farbami, tak budú existovať štyri body rovnakej farby, ktoré tvoria vrcholy obdĺžnika.

16. Označme T ťažisko trojuholníka ABC. Dokážte, že platí

$$\sin|\measuredangle CAT| + \sin|\measuredangle CBT| \leqq \frac{2}{\sqrt{3}}\,.$$

17. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, ktoré spĺňajú rovnosť

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3k \qquad \text{pre všetky} \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

kde k je pevné kladné celé číslo a $\mathbb{N}_0$ označuje množinu všetkých nezáporných celých čísel.