2002/2003
52. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh výberového sústredenia*

(*Sústredenie sa konalo 27. 4. – 3. 5. 2003.*)

1. Nájdite všetky polynómy $f(x)$ s reálnymi koeficientmi také, že pre každé reálne číslo x platí

$$(x+2003)f(x-2002)=(x-2001)f(x).$$

2. Ak máme usporiadanú štvoricu (x,y,z,w), tak z nej môžeme v jednom kroku vyrobiť usporiadanú štvoricu (xy,yz,zw,wx). Začali sme s usporiadanou štvoricou reálnych čísel (x_0,y_0,z_0,w_0) a po konečnom počte krokov sme dostali tú istú usporiadanú štvoricu. S akou usporiadanou štvoricou sme mohli začať?

3. Nájdite najväčšie $p\in\mathbb{R}$ také, že pre každý trojuholník so stranami a, b, c a obsahom S je splnená nerovnosť

$$a^2+b^2\geqq pc^2+3S.$$

4. Dve kružnice k_1 a k_2 majú vonkajší dotyk v bode K. Obe majú vnútorný dotyk s kružnicou k postupne v bodoch A_1 a A_2. Nech P je jeden z priesečníkov kružnice k so spoločnou dotyčnicou kružníc k_1 a k_2 vedenou bodom K. Pre $i=1,2$ označme B_i priesečník priamky PA_i s kružnicou k_i (rôzny od A_i). Dokážte, že priamka B_1B_2 je spoločnou dotyčnicou kružníc k_1 a k_2.

5. V ostrouhlom trojuholníku ABC označme H pätu výšky vedenej z vrcholu A. Nech P je ľubovoľný vnútorný bod trojuholníka ABC a nech D, E a Q sú po rade päty výšok z neho vedených na strany AB, AC a AH. Dokážte, že platí

$$\big||AB|\cdot|AD|-|AC|\cdot|AE|\big|=|BC|\cdot|PQ|.$$

6. Nech $a_0,a_1,a_2,\dots$ je postupnosť kladných reálnych čísel spĺňajúca podmienku $a_{i-1}a_{i+1}\leqq a_i^2$ pre každé $i\geqq 1$. Dokážte, že pre každé $n>1$ platí

$$\frac{a_0+\dots+a_n}{n+1}\cdot\frac{a_1+\dots+a_{n-1}}{n-1}\geqq\frac{a_0+\dots+a_{n-1}}{n}\cdot\frac{a_1+\dots+a_n}{n}.$$

7. Pre každé prirodzené číslo n nech $a_n=0$ alebo 1, podľa toho, či je počet jednotiek v zápise čísla n v dvojkovej sústave párny (0) alebo nepárny (1). Dokážte, že neexistujú prirodzené čísla k a m také, že

$$a_{k+j}=a_{k+m+j}=a_{k+2m+j}$$

pre každé $0\leqq j\leqq m-1$.

8. Nájdite všetky reálne čísla x, y, pre ktoré platí

$$(x-1)(y^2+6)=y(x^2+1),$$
$$(y-1)(x^2+6)=x(y^2+1).$$

9. Nech n je nepárne prirodzené číslo. Šachovnica $n \times n$ má políčka zafarbené striedavo bielou a čiernou farbou, pričom rohy sú čierne. *Tromino* v tvare L je tvorené troma susediacimi políčkami. Pre aké hodnoty n je možné pokryť všetky čierne políčka šachovnice neprekrývajúcimi sa trominami? Ak je to možné, aký je minimálny počet potrebných tromín?

10. Aký ciferný súčet môže mať štvorec (t. j. druhá mocnina) celého čísla?

11. Daný je pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C, pričom $|BC| < |AC|$. Označme I stred vpísanej kružnice, O stred strany AB. Na stranách AC, AB zvoľme po rade body Q, P tak, aby platilo $|CQ| = |CB| = |BP|$. Priesečník osi uhla ACB a priamky QP označme S. Kolmica na QI prechádzajúca bodom S pretína BQ v bode R. Dokážte, že body I, R, O ležia na jednej priamke.

12. Nájdite všetky celočíselné riešenia rovnice

$$\frac{13}{x^2} + \frac{1996}{y^2} = \frac{z}{1997}.$$

13. Do štvorstena je vpísaná guľa, ktorá sa jednej steny dotýka v priesečníku výšok, druhej sa dotýka v ťažisku a tretej sa dotýka v strede vpísanej kružnice. Dokážte, že potom je štvorsten pravidelný.

14. Nájdite súčet štvorcov prvých 100 členov aritmetickej postupnosti, o ktorej viete, že súčet prvých 100 členov je -1 a súčet druhého, štvrtého, šiesteho, ... a stého člena je $+1$.

15. Nájdite všetky reálne riešenia rovnice

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x,$$

kde p je reálny parameter.

16. Fibonacciho postupnosť F_n je definovaná nasledovne: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Určte najväčší spoločný deliteľ čísel F_{2005} a F_{3005}.

17. Konečná postupnosť celých čísel $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sa nazýva kvadratická, ak pre každé $i \in \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí $|a_i - a_{i-1}| = i^2$.
(a) Dokážte, že pre ľubovoľné dve celé čísla b a c existuje prirodzené číslo n a kvadratická postupnosť taká, že platí $a_0 = b$ a $a_n = c$.
(b) Nájdite najmenšie prirodzené číslo n, pre ktoré existuje kvadratická postupnosť s $a_0 = 0$ a $a_n = 2004$.

18. Nech a, b sú dané prirodzené čísla, nech f je funkcia z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ taká, že platí $|f(x)| \leqq 1$ a

$$f(x + a + b) + f(x) = f(x + a) + f(x + b)$$

pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Dokážte, že f je periodická funkcia (t. j. existuje také p, že $f(x + p) = f(x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$).

19. Dve kružnice k_1 a k_2 sa pretínajú v bodoch P a Q. Zvoľme si ľubovoľne body A_1, B_1 na kružnici k_1. Priamky A_1P a B_1P pretínajú kružnicu k_2 okrem bodu P v bodoch A_2, B_2 a priamky A_1B_1, A_2B_2 sa pretínajú v bode C. Dokážte, že keď meníme polohu bodov A_1, B_1, tak stredy kružníc opísaných trojuholníku A_1A_2C ležia na kružnici.