

2011/2012
61. ročník MO

Zadania úloh krajského kola kategórie B

(Súťaž sa konala v utorok 17. apríla 2012.)

1. Daných je 2012 kladných čísel menších ako 1, ktorých súčet je 7. Dokážte, že tieto čísla sa dajú rozdeliť na štyri skupiny tak, aby súčet čísel v každej skupine bol aspoň 1.
(Vojtech Bálint)

2. Určte, koľkými spôsobmi možno vrcholom pravidelného 9-uholníka $ABCDEFGHI$ priradiť čísla z množiny $\{17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97\}$ tak, aby každé z nich bolo priradené inému vrcholu a aby súčet čísel priradených každým trom susedným vrcholom bol deliteľný tromi.
(Jaroslav Švrček)

3. Pravouhlému trojuholníku ABC je vpísaná kružnica, ktorá sa dotýka prepony AB v bode K . Úsečku AK otočíme o 90° do polohy AP a úsečku BK otočíme o 90° do polohy BQ tak, aby body P, Q ležali v polrovine opačnej k polrovine ABC .

a) Dokážte, že obsahy trojuholníkov ABC a PQK sú rovnaké.

b) Dokážte, že obvod trojuholníka ABC nie je väčší ako obvod trojuholníka PQK .
Kedy nastane rovnosť obvodov?

(Jaroslav Zhouf)

4. Nájdite všetky reálne čísla x, y , ktoré vyhovujú sústave rovníc

$$\begin{aligned}x \cdot \left\lfloor \frac{y}{x} \right\rfloor &= 5, \\ y \cdot \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor &= -6.\end{aligned}$$

(Zápis $\lfloor a \rfloor$ označuje dolnú celú časť čísla a , t. j. najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje a .)
(Pavel Calábek)