

2011/2012
61. ročník MO

Zadania úloh krajského kola kategórie C

(Súťaž sa konala v utorok 17. apríla 2012.)

1. Pre všetky reálne čísla x, y, z také, že $x < y < z$, dokážte nerovnosť

$$x^2 - y^2 + z^2 > (x - y + z)^2.$$

(Jaromír Šimša)

2. Janko má tri kartičky, na každej je iná nenulová cifra. Súčet všetkých trojciferných čísel, ktoré možno z týchto kartičiek zostaviť, je číslo o 6 väčšie ako trojnásobok jedného z nich. Aké cifry sú na kartičkách? (Tomáš Jurík)

3. Nech E je stred strany CD rovnobežníka $ABCD$, v ktorom platí $2|AB| = 3|BC|$. Dokážte, že ak sa dá do štvoruholníka $ABCE$ vpísať kružnica, dotýka sa táto kružnica strany BC v jej strede. (Ján Mazák)

4. Na tabuli je napísaných prvých n celých kladných čísel. Marína a Tamara sa striedajú v ťahoch pri nasledujúcej hre. Najskôr Marína zotrie jedno z čísel na tabuli. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, zotrie jedno z čísel, ktoré sa od predchádzajúceho zotretého čísla ani nelíši o 1, ani s ním nie je súdeliteľné. Hráčka, ktorá je na ťahu a nemôže už žiadne číslo zotrieť, prehrá. Pre $n = 6$ a pre $n = 12$ rozhodnite, ktorá z hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle na ťahoch druhej hráčky. (Pavel Calábek)