61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012 *Riešenia úloh krajského kola kategórie B*

---

1. *Daných je 2 012 kladných čísel menších ako 1, ktorých súčet je 7. Dokážte, že tieto čísla sa dajú rozdeliť na štyri skupiny tak, aby súčet čísel v každej skupine bol aspoň 1.* (*Vojtech Bálint*)

Riešenie. Dané čísla označme $a_1, a_2, \ldots, a_{2012}$. Zrejme existuje index $k \geqq 1$ taký, že

$$a_1 + \cdots + a_k < 1 \leqq a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1} < 2.$$

Čísla $a_1, \ldots, a_{k+1}$ tvoria prvú požadovanú skupinu. Ďalej zrejme existuje index $l \geqq k + 2$ taký, že

$$a_{k+2} + \cdots + a_l < 1 \leqq a_{k+2} + \cdots + a_l + a_{l+1} < 2.$$

Čísla $a_{k+2}, \ldots, a_{l+1}$ tvoria druhú požadovanú skupinu. Analogicky zrejme existuje index $m \geqq l + 2$ taký, že

$$a_{l+2} + \cdots + a_m < 1 \leqq a_{l+2} + \cdots + a_m + a_{m+1} < 2.$$

Čísla $a_{l+2}, \ldots, a_{m+1}$ tvoria tretiu požadovanú skupinu. Keďže $a_1 + \cdots + a_{m+1} < 6$, platí $a_{m+2} + \cdots + a_{2012} \geqq 1$, takže čísla $a_{m+2}, \ldots, a_{2012}$ tvoria štvrtú požadovanú skupinu.

Za systematické a úplné riešenie udeľte 6 bodov.

---

2. *Určte, koľkými spôsobmi možno vrcholom pravidelného 9-uholníka $ABCDEFGHI$ priradiť čísla z množiny $\{17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97\}$ tak, aby každé z nich bolo priradené inému vrcholu a aby súčet čísel priradených každým trom susedným vrcholom bol deliteľný tromi.* (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Najskôr si uvedomme, že čísla 27, 57 a 87 sú deliteľné tromi, čísla 37, 67 a 97 dávajú po delení tromi zvyšok 1 a čísla 17, 47 a 77 dávajú po delení tromi zvyšok 2. Označme $\overline{0} = \{27, 57, 87\}$, $\overline{1} = \{37, 67, 97\}$ a $\overline{2} = \{17, 47, 77\}$. Uvažujme teraz pravidelný deväťuholník $ABCDEFGHI$. Pri skúmaní deliteľnosti tromi súčtu trojíc prirodzených čísel priradených trom susedným vrcholom uvažovaného deväťuholníka stačí uvažovať namiesto daných čísel iba ich zvyšky po delení tromi. Pritom tri čísla môžu dať v súčte číslo deliteľné tromi jedine tak, že buď všetky tri dávajú po delení tromi rovnaký zvyšok (patria do rovnakej zvyškovej triedy), alebo sú každé z inej zvyškovej triedy. Keby však boli tri čísla priradené po sebe idúcim vrcholom z rovnakej zvyškovej triedy, muselo by z tej istej triedy byť aj číslo priradené nasledujúcemu vrcholu (ktorýmkoľvek smerom), a tým pádom aj všetky ďalšie čísla. Takých deväť čísel k dispozícii nemáme, preto ľubovoľným trom susedným vrcholom musia byť priradené čísla z navzájom rôznych zvyškových tried.

Predpokladajme najskôr, že vrcholu A je priradené niektoré číslo z množiny $\overline{0}$. V takom prípade možno vrcholom uvažovaného deväťuholníka vzhľadom na podmienky úlohy priradiť zvyškové triedy $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$ iba dvoma spôsobmi podľa toho, ktorému z dvoch susedných vrcholov vrcholu A priradíme $\overline{1}$ a ktorému $\overline{2}$. Ďalším vrcholom sú potom už zvyškové triedy vzhľadom na podmienku deliteľnosti priradené jednoznačne. Výsledné priradenie môžeme zapísať ako

$$(A, B, C, D, E, F, G, H, I) \leftrightarrow (\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}),$$

alebo

$$(A, B, C, D, E, F, G, H, I) \leftrightarrow (\overline{0}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{2}, \overline{1}).$$

Podobne, ak je vrcholu A priradená zvyšková trieda $\overline{1}$, platí buď

$$(A, B, C, D, E, F, G, H, I) \leftrightarrow (\overline{1}, \overline{0}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{2}),$$

alebo

$$(A, B, C, D, E, F, G, H, I) \leftrightarrow (\overline{1}, \overline{2}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{0}).$$

Napokon, ak je vrcholu A priradená zvyšková trieda $\overline{2}$, platí buď

$$(A, B, C, D, E, F, G, H, I) \leftrightarrow (\overline{2}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{0}, \overline{1}),$$

alebo

$$(A, B, C, D, E, F, G, H, I) \leftrightarrow (\overline{2}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{0}).$$

Podľa počtu možností, ako postupne vyberať čísla z jednotlivých zvyškových tried, každému z uvedených prípadov prislúcha podľa pravidla súčinu práve

$$(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 6^3$$

možností. Vzhľadom na to, že iný prípad okrem šiestich uvedených nemôže nastať, vidíme, že hľadaný počet možností, ako priradiť vrcholom uvažovaného deväťuholníka daných deväť čísel, je

$$6 \cdot 6^3 = 6^4 = 1\,296.$$

Za úplné riešenie udeľte 6 bodov, z toho 2 body za zdôvodnenie, že čísla priradené trom susedným vrcholom majú navzájom rôzne zvyšky po delení tromi, 2 body za uvedenie šiestich možností, ako môžu byť zvyškové triedy rozdelené, a 2 body za správny výpočet počtu možností.

Za každé vynechanie jedného zo šiestich prípadov strhnite 1 bod. Za chybne spočítaný počet možností strhnite 2 body; za menej závažnú numerickú chybu strhnite 1 bod. Za správny výpočet počtu možností, ktoré riešiteľ uvažoval, aj keď neuviedol všetky možnosti, dajte 2 body.

---

3. *Pravouhlému trojuholníku ABC je vpísaná kružnica, ktorá sa dotýka prepony AB v bode K. Úsečku AK otočíme o $90°$ do polohy AP a úsečku BK otočíme o $90°$ do polohy BQ tak, aby body P, Q ležali v polrovine opačnej k polrovine ABC.*

a) Dokážte, že obsahy trojuholníkov ABC a PQK sú rovnaké.

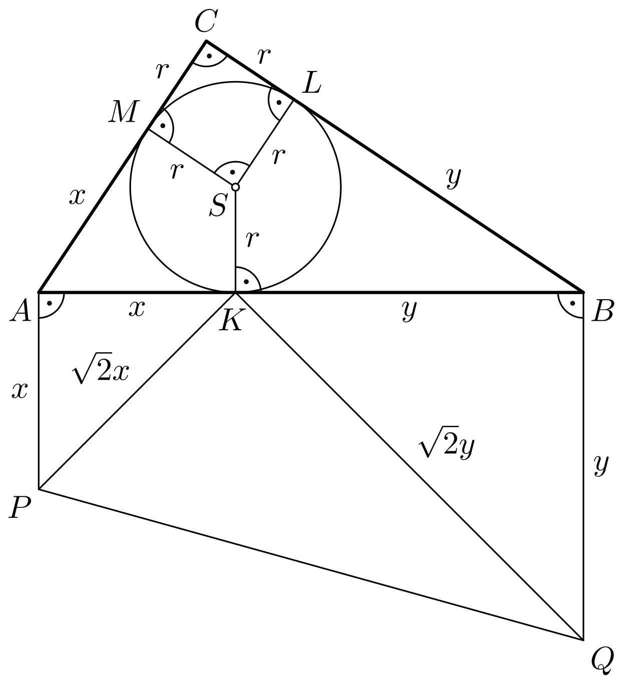
b) Dokážte, že obvod trojuholníka ABC nie je väčší ako obvod trojuholníka PQK. Kedy nastane rovnosť obvodov?

(*Jaroslav Zhouf*)

Riešenie. a) Označme S stred a r polomer kružnice vpísanej trojuholníku ABC a L, M body dotyku tejto kružnice postupne so stranami BC, CA (obr. 1). Ak označíme $|AK| = x$, $|BK| = y$, tak $|AP| = |AM| = x$, $|KP| = x\sqrt{2}$, $|BQ| = |BL| = y$, $|KQ| = y\sqrt{2}$.

Keďže oba uhly AKP, BKQ majú veľkosť $45°$, je trojuholník PQK pravouhlý, takže jeho obsah je

$$S_{PQK} = \frac{x\sqrt{2} \cdot y\sqrt{2}}{2} = xy.$$



Obr. 1

Štvoruholník $SLCM$ je štvorec so stranou dĺžky r a $|AM| = x$, $|BL| = y$. Obsah trojuholníka ABC je rovný súčtu obsahov trojuholníkov ABS, BCS a CAS, teda

$$S_{ABC} = \frac{(x+y)r + (y+r)r + (x+r)r}{2} = (x+y+r)r.$$

Obsah trojuholníka ABC je zároveň rovný

$$S_{ABC} = \frac{|AC| \cdot |BC|}{2} = \frac{(x+r)(y+r)}{2} = \frac{xy}{2} + \frac{(x+y+r)r}{2} = \frac{xy}{2} + \frac{S_{ABC}}{2}.$$

Odtiaľ dostávame $S_{ABC} = xy$, čiže $S_{ABC} = S_{PQK}$, čo sme mali dokázať.

b) V trojuholníku ABC sú dĺžky strán $a = y + r$, $b = x + r$, $c = x + y$. Obvod trojuholníka ABC je $a + b + |AB|$, obvod trojuholníka PQK je $x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + |PQ|$.

Zrejme platí $|AB| \leqq |PQ|$ ($|AB|$ je vzdialenosťou rovnobežiek AP, BQ, obr. 1). Rovnosť nastane jedine v prípade $|AP| = |BQ|$, čiže $x = y$.

Ešte dokážeme, že $a + b \leqq x\sqrt{2} + y\sqrt{2}$, teda že $a + b \leqq c\sqrt{2}$. Posledná nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou, ktorú dostaneme jej umocnením na druhú, pretože obe jej strany sú kladné. Dostaneme tak $a^2 + b^2 + 2ab \leqq 2c^2$. Keďže v pravouhlom trojuholníku ABC platí $a^2 + b^2 = c^2$, máme dokázať nerovnosť $2ab \leqq a^2 + b^2$, ktorá je však ekvivalentná s nerovnosťou $0 \leqq (a - b)^2$. Tá platí pre všetky reálne čísla a, b a rovnosť v nej nastane jedine pre $a = b$, t. j. $x = y$.

Celkovo vidíme, že obvod trojuholníka ABC je menší alebo rovný obsahu trojuholníka PQK a rovnosť nastane práve vtedy, keď je pravouhlý trojuholník ABC rovnoramenný.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 3 body za časť a) a 3 body za časť b). V časti b) za vynechanie podmienky, kedy nastane rovnosť, strhnite 1 bod.

---

4. *Nájdite všetky reálne čísla x, y, ktoré vyhovujú sústave rovníc*

$$x \cdot \left\lfloor \frac{y}{x} \right\rfloor = 5,$$
$$y \cdot \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor = -6.$$

(Zápis $\lfloor a \rfloor$ označuje dolnú celú časť čísla a, t. j. najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje a.) (*Pavel Calábek*)

Riešenie. Nutne platí $xy \neq 0$. Zrejme tiež $x \neq y$; keby bolo $x = y$, dostali by sme $\lfloor x/y \rfloor = \lfloor y/x \rfloor = 1$, takže z prvej rovnice by vyšlo $x = 5$ a z druhej rovnice $y = -6$, čo je v rozpore s rovnosťou $x = y$. Podobne nemôže byť ani $x = -y$, takže dokonca $|x| \neq |y|$.

Ak by obe neznáme mali rovnaké znamienka, bolo by jedno z čísel x/y, y/x z intervalu $(0, 1)$, takže jeho celá časť by bola 0, čo nevedie k riešeniu. Jedna z neznámych teda musí byť kladná a druhá záporná a obe celé časti v rovniciach sú záporné. Z nich preto tiež vyplýva, že $x < 0$ a $y > 0$.

Znamienka čísel x, y sú rôzne a absolútne hodnoty týchto čísel sú tiež rôzne, preto práve jedno z čísel x/y, y/x je z intervalu $(-1, 0)$, a jeho celá časť je teda -1.

Najskôr preskúmame prípad $\lfloor x/y \rfloor = -1$. Z druhej zadanej rovnice dostaneme $y = 6$. Prvá zadaná rovnica má potom tvar $\lfloor 6/x \rfloor = 5/x$. Ak navyše využijeme definíciu celej časti, dostaneme

$$\frac{5}{x} = \left\lfloor \frac{6}{x} \right\rfloor \leqq \frac{6}{x}, \quad \text{t. j.} \quad \frac{5}{x} \leqq \frac{6}{x}.$$

Posledná nerovnica však nemôže pre záporné číslo x platiť, lebo je ekvivalentná s nerovnosťou $5 \geqq 6$. Daná sústava rovníc nemá teda v prípade $\lfloor x/y \rfloor = -1$ riešenie.

Ostáva prípad $\lfloor y/x \rfloor = -1$. Z prvej zadanej rovnice máme $x = -5$. Druhá zadaná rovnica má potom tvar $\lfloor -5/y \rfloor = -6/y$. Podľa definície celej časti teda platí

$$\frac{-5}{y} < \left\lfloor \frac{-5}{y} \right\rfloor + 1 = \frac{-6}{y} + 1, \quad \text{t. j.} \quad \frac{-5}{y} < \frac{-6}{y} + 1,$$

odkiaľ po vynásobení kladným číslom y dostaneme $y > 1$. Keď využijeme definíciu celej časti aj pre rovnicu $\lfloor y/-5 \rfloor = -1$, dostaneme

$$-1 \leqq \frac{y}{-5} < 0, \quad \text{čiže} \quad 0 < y \leqq 5.$$

Spojením oboch podmienok pre neznámu y tak dostávame $1 < y \leqq 5$. Naopak, pre každé také y a $x = -5$ je prvá rovnica sústavy splnená. Túto podmienku postupne upravíme na ekvivalentné nerovnosti $1 > 1/y \geqq \frac{1}{5}$ a $-5 < -5/y \leqq -1$. Z tej poslednej vyplýva, že výraz $\lfloor -5/y \rfloor$ môže nadobúdať jedine hodnoty -5, -4, -3, -2, -1.

Z druhej rovnice upravenej na tvar $y = -6/\lfloor -5/y \rfloor$ tak vyplýva, že neznáma y môže nadobúdať jedine hodnoty $\frac{6}{5}$, $\frac{3}{2}$, 2, 3, 6. Posledná z nich však (na rozdiel od prvých štyroch) nespĺňa odvodené kritérium $1 < y \leqq 5$ platnosti prvej rovnice sústavy. Či je pre prvé štyri hodnoty splnená druhá rovnica sa musíme presvedčiť aspoň tak, že overíme hodnotu výrazu $\lfloor -5/y \rfloor$, ktorá nás k nim doviedla. Pre y rovné postupne $\frac{6}{5}$, $\frac{3}{2}$, 2, 3 je zlomok $-5/y$ postupne rovný $-\frac{25}{6}$, $-\frac{10}{3}$, $-\frac{5}{2}$ a $-\frac{5}{3}$ s prislúchajúcimi celými časťami skutočne -5, -4, -3, -2.

Záver. Zhrnutím všetkých úvah dostávame, že riešením danej sústavy sú nasledujúce dvojice čísel (x, y): $(-5, \frac{6}{5})$, $(-5, \frac{3}{2})$, $(-5, 2)$, $(-5, 3)$.

Za úplné riešenie udeľte 6 bodov, z toho 1 bod za zistenie, že obe celé časti v rovniciach sú nutne záporné, a ďalšie dva body za zistenie, že musí platiť $x = -5$ alebo $y = 6$. Pri postupe založenom len na experimentovaní so zvolenými číslami za skúšaním nájdené všetky štyri riešenia dajte 2 body, ak by niektoré riešenie chýbalo, udeľte 1 bod, za nájdenie jediného riešenia nedávajte žiadny bod.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori: Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný, Jaroslav Zhouf

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012