61. ročník Matematickej olympiády
2011/2012 *Riešenia úloh krajského kola kategórie C*

1. *Pre všetky reálne čísla x, y, z také, že $x < y < z$, dokážte nerovnosť*

$$x^2 - y^2 + z^2 > (x - y + z)^2.$$

(Jaromír Šimša)

Riešenie. Aby sme mohli použiť vzorec $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, presuňme najskôr jeden z krajných členov ľavej strany, napríklad člen z^2, na pravú stranu:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &> (x - y + z)^2 - z^2, \\ (x - y)(x + y) &> (x - y + z - z)(x - y + z + z), \\ (x - y)(x + y) &> (x - y)(x - y + 2z). \end{aligned}$$

Keďže spoločný činiteľ $x - y$ oboch strán poslednej nerovnosti je podľa predpokladu úlohy číslo záporné, budeme s dôkazom hotoví, keď ukážeme, že zvyšné činitele spĺňajú opačnú nerovnosť $x + y < x - y + 2z$. Tá je však zrejme ekvivalentná s nerovnosťou $2y < 2z$, čiže $y < z$, ktorá podľa zadania úlohy naozaj platí.

Iné riešenie. Podľa vzorca pre druhú mocninu trojčlena platí

$$(x - y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz.$$

Dosaďme to do pravej strany dokazovanej nerovnosti a urobme niekoľko ďalších ekvivalentných úprav:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + z^2 &> x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz, \\ 0 &> 2y^2 - 2xy + 2xz - 2yz, \\ 0 &> 2y(y - x) + 2z(x - y), \\ 0 &> 2(y - x)(y - z). \end{aligned}$$

Posledná nerovnosť už vyplýva z predpokladov úlohy, podľa ktorých je činiteľ $y - x$ kladný, zatiaľ čo činiteľ $y - z$ je záporný.

Za úplné riešenie udeľte 6 bodov. Len za overovanie nerovnosti pre konkrétne trojice čísel $x < y < z$ žiadny bod nedávajte.

2. *Janko má tri kartičky, na každej je iná nenulová cifra. Súčet všetkých trojciferných čísel, ktoré možno z týchto kartičiek zostaviť, je číslo o 6 väčšie ako trojnásobok jedného z nich. Aké cifry sú na kartičkách?* (Tomáš Jurík)

Riešenie. Označme $\overline{abc}$ to trojciferné číslo, o ktorého trojnásobku sa píše v texte úlohy. Platí tak rovnica

$$3\overline{abc} + 6 = \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}.$$

Keďže na pravej strane je každá z cifier a, b, c dvakrát na mieste jednotiek, desiatok aj stoviek, môžeme rovnicu prepísať na tvar

$$300a + 30b + 3c + 6 = 222a + 222b + 222c, \quad \text{čiže} \quad 78a + 6 = 192b + 219c.$$

Po vydelení číslom 3 dostaneme rovnicu $26a + 2 = 64b + 73c$, z ktorej vidíme, že c je párna cifra. Platí preto $c \geqq 2$, čo spolu so zrejmou nerovnosťou $b \geqq 1$ (pripomíname, že všetky tri neznáme cifry sú podľa zadania nenulové) vedie na odhad

$$64b + 73c \geqq 64 + 146 = 210.$$

Musí preto platiť $26a + 2 \geqq 210$, odkiaľ $a \geqq (210 - 2) : 26 = 8$, takže cifra a je buď 8, alebo 9. Pre $a = 8$ však v nerovnosti z predošlej vety nastane rovnosť, takže nutne $b = 1$ a $c = 2$ (a rovnica zo zadania úlohy je potom splnená). Pre $a = 9$ dostávame rovnicu

$$64b + 73c = 26 \cdot 9 + 2 = 236,$$

z ktorej vyplýva, že c je jednak deliteľné štyrmi, jednak je menšie ako 4, čo nemôže nastať súčasne.

Odpoveď. Cifry na kartičkách sú 8, 2 a 1.

Poznámka. Riešiť odvodenú rovnicu $26a + 2 = 64b + 73c$ pre neznáme (nenulové a navzájom rôzne) cifry a, b, c možno viacerými úplnými a systematickými postupmi, uviedli sme len jeden z nich.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho najviac 3 body za správne zostavenú rovnicu, rozvoj dekadických zápisov čísel a úpravu na lineárnu rovnicu s neznámymi a, b, c. Ďalšími 3 bodmi potom ohodnoťte postup pri hľadaní riešenia odvodenej rovnice, pritom len za uhádnutie hľadanej trojice dajte 1 bod.

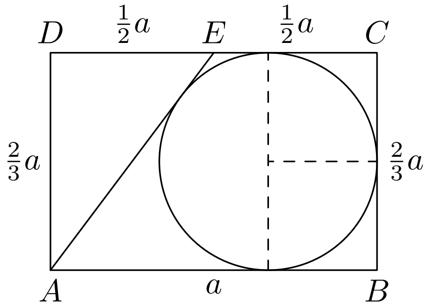
---

3. *Nech E je stred strany CD rovnobežníka $ABCD$, v ktorom platí $2|AB| = 3|BC|$. Dokážte, že ak sa dá do štvoruholníka $ABCE$ vpísať kružnica, dotýka sa táto kružnica strany BC v jej strede.* (*Ján Mazák*)

Riešenie. Keďže štvoruholník $ABCE$ je podľa zadania dotyčnicový, pre dĺžky jeho strán platí známa rovnosť[1]

$$|AB| + |CE| = |BC| + |AE|.$$

V našej situácii pri označení $a = |AB|$ platí $|BC| = |AD| = \frac{2}{3}a$ a $|CE| = |DE| = \frac{1}{2}a$ (obr. 1), odkiaľ po dosadení do uvedenej rovnosti zistíme, že $|AE| = \frac{5}{6}a$.



Obr. 1

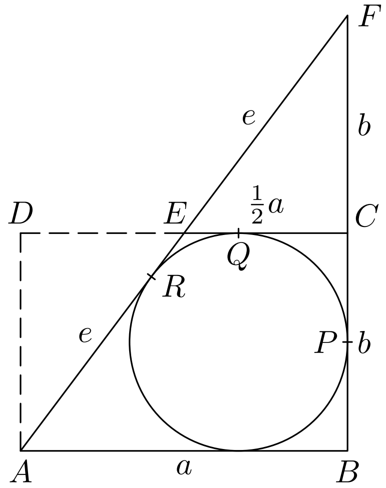
[1] Rovnosť sa odvodí rozpísaním dĺžok strán na ich úseky vymedzené bodmi dotyku vpísanej kružnice a následným využitím toho, že každé dva z týchto úsekov, ktoré vychádzajú z rovnakého vrcholu štvoruholníka, sú zhodné.

Teraz si všimneme, že pre dĺžky strán trojuholníka ADE platí

$$|AD| : |DE| : |AE| = \tfrac{2}{3}a : \tfrac{1}{2}a : \tfrac{5}{6}a = 4 : 3 : 5,$$

takže podľa (obrátenej časti) Pytagorovej vety má trojuholník ADE pravý uhol pri vrchole D, a teda rovnobežník $ABCD$ je obdĺžnik. Dotyčnica BC kružnice vpísanej štvoruholníku $ABCE$ je teda kolmá na dve jej (navzájom rovnobežné) dotyčnice AB a CE. To už zrejme znamená, že bod dotyku dotyčnice BC je stredom úsečky BC (vyplýva to zo zistenej kolmosti vyznačeného priemeru kružnice na jej vyznačený polomer).

Iné riešenie. Ukážeme, že požadované tvrdenie možno dokázať aj bez všimnutia si, že rovnobežník $ABCD$ je v danej úlohe obdĺžnikom. Namiesto toho využijeme, že úsečka CE je stredná priečka trojuholníka ABF, pričom F je priesečník polpriamok BC a AE (obr. 2), lebo $CE \parallel AB$ a $|CE| = \frac{1}{2}|AB|$. Označme preto $a = |AB| = 2|CE|$,



Obr. 2

$b = |BC| = |CF|$ a $e = |AE| = |EF|$ (rovnosť $2a = 3b$ použijeme až neskôr). Rovnako ako v prvom riešení využijeme rovnosť $b + e = a + \frac{1}{2}a$ $(= \frac{3}{2}a)$, ktorá platí pre dĺžky strán dotyčnicového štvoruholníka $ABCE$. Kružnica jemu vpísaná sa dotýka strán BC, CE, AE postupne v bodoch P, Q, R tak, že platia rovnosti

$$|CP| = |CQ|, \quad |EQ| = |ER| \quad \text{a tiež} \quad |FP| = |FR|.$$

Pre súčet zhodných dĺžok $|FP|$ a $|FR|$ teda platí

$$\begin{aligned}|FP| + |FR| &= (b + |CP|) + (e + |ER|) = (b + e) + (|CP| + |ER|) = \\ &= \tfrac{3}{2}a + (|CQ| + |EQ|) = \tfrac{3}{2}a + \tfrac{1}{2}a = 2a,\end{aligned}$$

čo znamená, že $|FP| = |FR| = a$.

Teraz už riešenie úlohy ľahko dokončíme. Rovnosť $|BP| = \frac{1}{2}b$, ktorú máme v našej situácii dokázať, vyplýva z rovnosti

$$|BP| = |BF| - |FP| = 2b - a,$$

keď do nej dosadíme zadaný vzťah $a = \frac{3}{2}b$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za použitie kritéria dotyčnicovosti štvoruholníka $ABCE$ na vyjadrenie dĺžky strany AE.

4. *Na tabuli je napísaných prvých n celých kladných čísel. Marína a Tamara sa striedajú v ťahoch pri nasledujúcej hre. Najskôr Marína zotrie jedno z čísel na tabuli. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, zotrie jedno z čísel, ktoré sa od predchádzajúceho zotretého čísla ani nelíši o 1, ani s ním nie je súdeliteľné. Hráčka, ktorá je na ťahu a nemôže už žiadne číslo zotrieť, prehrá. Pre $n = 6$ a pre $n = 12$ rozhodnite, ktorá z hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle na ťahoch druhej hráčky.* (*Pavel Calábek*)

Riešenie. Úloha dvoch po sebe zotieraných čísel je v zadanej hre symetrická: ak je po čísle x možné zotrieť číslo y, je (pri inom priebehu hry) po čísle y možné zotrieť číslo x. Preto si môžeme celú hru (so zadaným číslom n) „sprehľadniť" tak, že najskôr vypíšeme všetky takéto (nazývajme ich *prípustné*) dvojice (x, y). Keďže na poradí čísel v prípustnej dvojici nezáleží, stačí vypisovať len tie dvojice (x, y), v ktorých $x < y$.

V prípade $n = 6$ všetky prípustné dvojice sú

$$(1, 3),\ (1, 4),\ (1, 5),\ (1, 6),\ (2, 5),\ (3, 5).$$

Z tohto zoznamu ľahko odhalíme, že víťaznú stratégiu má (prvá) hráčka Marína. Ak totiž zotrie na začiatku hry číslo 4, musí Tamara zotrieť číslo 1, a keď potom Marína zotrie číslo 6, nemôže už Tamara žiadne ďalšie číslo zotrieť. Okrem tohto priebehu $4 \to 1 \to 6$ si môže Marína zaistiť víťazstvo aj inými, pre Tamaru „vynútenými" priebehmi, napríklad $6 \to 1 \to 4$ alebo $4 \to 1 \to 3 \to 5 \to 2$.

V prípade $n = 12$ je všetkých prípustných dvojíc výrazne väčšie množstvo. Preto si položíme otázku, či všetky čísla od 1 do 12 možno rozdeliť na šesť prípustných dvojíc. Ak totiž nájdeme takú šesticu, môžeme opísať víťaznú stratégiu druhej hráčky (Tamary): ak zotrie Marína pri ktoromkoľvek svojom ťahu číslo x, Tamara potom vždy zotrie to číslo y, ktoré s číslom x tvorí jednu zo šiestich nájdených dvojíc. Tak nakoniec Tamara zotrie aj posledné (dvanáste) číslo a vyhrá (prípadne hra skončí skôr tak, že Marína nebude môcť zotrieť žiadne číslo).

Hľadané rozdelenie všetkých 12 čísel do šiestich dvojíc naozaj existuje, napríklad

$$(1, 4),\ (2, 9),\ (3, 8),\ (5, 12),\ (6, 11),\ (7, 10).$$

Iné vyhovujúce rozdelenie dostaneme, keď v predošlom dvojice $(1, 4)$ a $(6, 11)$ zameníme dvojicami $(1, 6)$ a $(4, 11)$. Ďalšie, menej podobné vyhovujúce rozdelenie je napríklad

$$(1, 6),\ (2, 5),\ (3, 10),\ (4, 9),\ (7, 12),\ (8, 11).$$

Odpoveď. Pre $n = 6$ má víťaznú stratégiu Marína, pre $n = 12$ Tamara.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za vyriešenie prípadu $n = 6$ a 4 body za vyriešenie prípadu $n = 12$.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori:	Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný, Jaromír Šimša
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012