2001/2002
51. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh výberového sústredenia*

(*Sústredenie sa konalo 21. – 27. 4. 2002.*)

1. Množinu troch nezáporných celých čísel $\{x, y, z\}$, $x < y < z$, nazývame *historickou*, ak $\{z - y, y - x\} = \{1776, 2001\}$. Ukážte, že množinu nezáporných celých čísel môžeme napísať ako zjednotenie po dvoch disjunktných historických množín.

2. Pre bod M vnútri trojuholníka ABC označme A', B' a C' po rade päty kolmíc spustených z bodu M na priamky BC, CA a AB. Definujme

$$p(M) = \frac{|MA'|}{|MA|} \cdot \frac{|MB'|}{|MB|} \cdot \frac{|MC'|}{|MC|}.$$

Nájdite bod M, pre ktorý je $p(M)$ maximálne. Označme $\mu(ABC)$ toto maximum. Pre ktoré trojuholníky ABC je hodnota $\mu(ABC)$ najväčšia?

3. Nech $p \geqq 5$ je prvočíslo. Dokážte, že existuje prirodzené číslo a, $1 \leqq a \leqq p - 2$, také, že čísla $a^{p-1} - 1$ a $(a + 1)^{p-1} - 1$ nie sú deliteľné číslom p.

4. Nájdite všetky postupnosti prirodzených čísel $a_1, \dots, a_n$, pre ktoré

$$\frac{99}{100} = \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

kde $a_0 = 1$ a $(a_{k+1} - 1)a_{k-1} \geqq a_k^2(a_k - 1)$ pre $k = 1, 2, \dots, n - 1$.

5. V danom trojuholníku ABC platí $|\measuredangle BAC| > |\measuredangle BCA|$. Vo vnútri trojuholníka ABC je daný bod P tak, aby $|\measuredangle PAC| = |\measuredangle BCA|$. Mimo trojuholníka ABC leží bod Q tak, aby $PQ \parallel AB$ a $BQ \parallel AC$. Nech R je bod na strane BC (R je od bodu Q oddelený priamkou AP) taký, že $|\measuredangle PRQ| = |\measuredangle BCA|$. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom ABC a PQR sa navzájom dotýkajú.

6. Prirodzené čísla a, b, c spĺňajú rovnosť

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

Najväčšieho spoločného deliteľa čísel a, b, c označme h. Dokážte, že čísla $habc$ aj $h(b - a)$ sú druhými mocninami prirodzených čísel.

7. Pre každé prirodzené číslo n dokážte nerovnosť

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geqq (2n+1)^{n-1} \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}\right)^2.$$

8. Dve kružnice k_1 a k_2 zo stredmi po rade v bodoch P a Q sa pretínajú v bodoch S a T. Spoločnú (vonkajšiu) dotyčnicu týchto kružníc, ktorá je bližšie k bodu S, označíme p a jej dotykové body s kružnicami k_1, k_2 po rade M a L.
(a) Druhý priesečník dotyčnice ku kružnici k_2 v bode S s kružnicou k_1 označíme K. Priesečník

priamok SL a MK označíme U. Dokážte, že priamky MU a MS sú dotyčnicami kružnice opísanej trojuholníku STU.
(b) Označme R priesečník osí strán MS a SL. Bod W je druhý priesečník kružnice opísanej trojuholníku PQR s priamkou RS. Dokážte, že S je stredom úsečky RW.

9. Šachovnica $n \times n$ je pokrytá neprekrývajúcimi sa štvorcami 2×2 a 3×3. Aké môže byť n?

10. Uhlopriečky AC a BD konvexného štvoruholníka $ABCD$ sa pretínajú v bode E. Dokážte, že pre obsahy útvarov platí nerovnosť

$$\sqrt{S_{ABE}} + \sqrt{S_{CDE}} \leqq \sqrt{S_{ABCD}}.$$

Kedy nastáva rovnosť?

11. Koľko je slov dĺžky n z písmen A, B, C, ktoré spĺňajú obe nasledujúce podmienky?
(i) Začínajú a končia sa na A;
(ii) každé dve susedné písmená sú rôzne.

12. Dané sú body A_1, A_2, A_3, A_4 na sfére opísanej pravidelnému štvorstenu s hranou dĺžky 1 také, že $|A_iA_j| < 1$ pre každé $i \neq j$. Dokážte, že tieto štyri body ležia na jednej hemisfére.

13. Na ostrove žije n domorodcov. Každí dvaja z nich sú buď priatelia alebo nepriatelia. Jedného dňa náčelník rozkázal všetkým obyvateľom (vrátane seba), aby si vyrobili a nosili náhrdelník z mušličiek, pričom
• ľubovoľní dvaja priatelia musia mať vo svojich náhrdelníkoch aspoň jednu mušličku rovnakého druhu;
• ľubovoľní dvaja nepriatelia musia mať vo svojich náhrdelníkoch všetky mušličky rôzneho druhu.
(Je prípustný aj náhrdelník bez mušličiek.)
(a) Ukážte, že domorodci mohli splniť náčelníkov rozkaz.
(b) Nájdite najmenší počet druhov mušličiek potrebných na to, aby domorodci mohli určite splniť náčelníkov rozkaz.

14. Je daný trojuholník ABC, v ktorom $\beta < 45°$. Na strane BC leží bod D tak, že stred kružnice vpísanej trojuholníku ABD je totožný so stredom O kružnice opísanej trojuholníku ABC. Nech l je kružnica opísaná trojuholníku AOC. Označme P priesečník dotyčníc ku kružnici l v bodoch A a C, ďalej označme Q priesečník priamok AD a CO a napokon X nech je priesečník priamky PQ a dotyčnice ku l v bode O. Dokážte, že $|XO| = |XD|$.

15. Nech $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ je množina n navzájom rôznych celých čísel, $n \geqq 3$. Označme m a M, najmenší a najväčší prvok množiny A. Predpokladajme, že existuje taký polynóm $p(x)$ s celočíselnými koeficientmi, ktorý spĺňa
(i) $\forall a \in A: \quad m < p(a) < M$;
(ii) $\forall a \in A \setminus \{m, M\}: \quad p(m) < p(a)$.
Dokážte, že potom $n \leqq 5$ a existujú celé čísla b a c také, že všetky prvky množiny A sú riešenia rovnice $p(x) + x^2 + bx + c = 0$.

16. Nech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú ľubovoľné reálne čísla. Dokážte nerovnosť

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \ldots + \frac{x_n}{1+x_1^2+\ldots+x_n^2} < \sqrt{n}.$$

17. Nech $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, kde n je kladné celé číslo. Podmnožinu množiny A nazveme *súvislou*, ak pozostáva z jedného prvku alebo z niekoľkých za sebou idúcich čísel. Nájdite najväčšie celé číslo k, pre ktoré A obsahuje k rôznych podmnožín $A_1, \ldots A_k$ takých, že prienik ľubovoľných dvoch množín A_i a A_j je súvislá množina.

18. Označme ABC trojuholník s ťažiskom G. Nájdite, spolu s dôkazom, polohu bodu P v rovine trojuholníka ABC tak, že výraz $|AP| \cdot |AG| + |BP| \cdot |BG| + |CP| \cdot |CG|$ má minimálnu hodnotu. Vyjadrite toto minimum pomocou dĺžok strán trojuholníka ABC.

19. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ spĺňajúce rovnosť

$$f(m^2 + f(n)) = f^2(m) + n$$

pre všetky celé čísla m a n.

20. Je daná rovnica

$$(p+2)x^2 - (p+1)y^2 + px + (p+2)y = 1,$$

kde p je dané prvočíslo tvaru $4k + 3$. Dokážte, že platia nasledujúce tvrdenia.
(a) Ak (x_0, y_0) je riešenie rovnice, kde x_0 a y_0 sú kladné celé čísla, tak p delí x_0.
(b) Daná rovnica má nekonečne veľa riešení tvaru (x_0, y_0), kde x_0, y_0 sú kladné celé čísla.