2000/2001
50. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh výberového sústredenia*

(*Sústredenie sa konalo 16. – 22. 4. 2001.*)

1. Dané sú dve kružnice k_1 a k_2, ktoré sa pretínajú v dvoch rôznych bodoch A a B. Priamka p prechádzajúca bodom A pretína kružnice k_1 a k_2 postupne v bodoch C a D. Označme P a Q projekcie bodu B zostrojené postupne na dotyčnicu ku kružnici k_1 v bode C a na dotyčnicu ku kružnici k_2 v bode D. Dokážte, že priamka PQ je dotyčnicou kružnice k_3 zostrojenej nad priemerom AB.

2. Dané je prirodzené číslo n, $n \geqq 2$ a reálne čísla x_i, $0 \leqq x_i \leqq 1$, kde $i = 1, 2, \dots, n$. Dokážte, že platí

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - (x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1) \leqq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

a zistite, kedy nastáva rovnosť!

3. V bode $(1, 1)$ súradnicovej sústavy je umiestnený balík piesku. Ďalej sa pohybuje vždy podľa jedného z nasledujúcich pravidiel:
- z bodu (a, b) môže prejsť do bodu $(2a, b)$ alebo do bodu $(a, 2b)$;
- z bodu (a, b) môže prejsť do bodu $(a - b, b)$, ak $a > b$ alebo do bodu $(a, b - a)$, ak $a < b$.

Do ktorých bodov súradnicovej sústavy sa môže balík dostať?

4. Zistite, či medzi prvými 100 000 001 členmi *Fibonacciho postupnosti* existuje číslo končiace štyrmi nulami!

5. Je daných $2n + 1$ kladných čísel takých, že rozdiel medzi súčtom ľubovoľných $n + 1$ daných čísel a súčtom zvyšných n čísel je kladný. Dokážte, že pre súčin B všetkých $\binom{2n+1}{n+1}$ takýchto rozdielov a súčin A všetkých $2n + 1$ daných čísel platí

$$B^{n+1} \leqq A^{\binom{2n}{n}}.$$

6. Ak

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0,$$

potom

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

Dokážte!

7. Uvažujme n rovnakých mincí, ktoré ležia na stole a vytvárajú uzavretú reťaz (každé dve susedné sa dotýkajú). Koľko otáčok vykoná minca rovnakých rozmerov, ak s ňou obídeme (bez kĺzania) celú reťaz, pričom predpokladáme, že pohybujúca sa minca sa neustále dotýka niektorej z daných mincí a pri svojom pohybe sa dotkne každej z daných mincí? Ako sa odpoveď zmení, ak bude mať táto minca k-krát väčší polomer ako mince v reťazi?

8. Dokážte, že na povrchu devätnásťstena, ktorý je opísaný guli s polomerom 10, existujú dva body, ktorých vzdialenosť je väčšia ako 21.

9. Tri kružnice rovnakého polomeru rovného t prechádzajú jedným bodom T, všetky sú vnútri trojuholníka ABC a každá z nich sa dotýka dvoch jeho strán. Označme r polomer vpísanej a R polomer opísanej kružnice trojuholníku ABC. Dokážte, že:
(i) $t = \frac{rR}{R+r}$;
(ii) T leží na priamke prechádzajúcej cez stred vpísanej a stred opísanej kružnice trojuholníka ABC.

10. Nech funkcia f je definovaná nasledovne:
- Ak $n = p^k > 1$ je mocnina prvočísla p, potom $f(n) = n + 1$.
- Ak $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ $(r > 1)$ je súčin mocnín navzájom rôznych prvočísel, potom $f(n) = p_1^{k_1} + \cdots + p_r^{k_r}$.

Pre každé $m > 1$ skonštruujme postupnosť $a_0, a_1, a_2, \dots$ takú, že $a_0 = m$ a $a_{j+1} = f(a_j)$ pre $j \geqq 0$. Označme $g(m)$ najmenšie číslo v tejto postupnosti. Určte hodnoty $g(m)$ pre každé $m > 1$.

11. Uvažujme reálne čísla spĺňajúce podmienku $a \geqq b \geqq c > 0$. Dokážte, že

$$\frac{a^2 - b^2}{c} + \frac{c^2 - b^2}{a} + \frac{a^2 - c^2}{b} \geqq 3a - 4b + c.$$

12. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geqq 6$ existuje množina M obsahujúca n bodov v rovine takých, že pre každý bod P z množiny M existujú aspoň 3 body v M vo vzdialenosti 1 od P!

13. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$(2n + 1)^n \geqq (2n)^n + (2n - 1)^n.$$

14. Všetky steny konvexného mnohostena sú trojuholníky. Dokážte, že môžeme nafarbiť každú hranu tohto mnohostena červenou alebo modrou farbou tak, aby sa z každého vrcholu dalo dostať do každého iného vrcholu iba po modrých a zároveň iba po červených hranách!

15. Množina T_0 pozostáva zo všetkých čísel tvaru $(2^k)!$, kde $k = 0, 1, 2, \dots$. Pre každé prirodzené číslo $p = 1, 2, \dots, 2001$ označme T_p množinu čísel, ktoré dostaneme ako súčty niekoľkých (aj jedného) rôznych čísel z T_{p-1}. Dokážte, že existuje prirodzené číslo, ktoré nepatrí do T_{2001}.

16. Dokážte, že ak v konvexnom päťuholníku $ABCDE$ platí $|\measuredangle ABC| = |\measuredangle ADE|$ a $|\measuredangle AEC| = |\measuredangle ADB|$, tak $|\measuredangle BAC| = |\measuredangle DAE|$.

17. Nech $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcia. Dokážte, že nasledujúce dve podmienky sú ekvivalentné:
(A) Buď $u(x) = 1$ pre každé $x \in \mathbb{R}$, alebo je funkcia u striktne monotónna a pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$u(x + y) = u(x)u(y).$$

(B) Existuje striktne monotónna funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taká, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x + y) = f(x)u(y) + f(y).$$

18. Daný je trojuholník ABC a jeho vnútorný bod M. Dokážte, že platí nerovnosť

$$\min\{|MA|, |MB|, |MC|\} + |MA| + |MB| + |MC| < |AB| + |BC| + |AC|.$$

19. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n, $n \geqq 2$ existuje n-prvková množina S celých čísel taká, že pre všetky $a, b \in S$, $a \neq b$ je číslo ab deliteľné číslom $(a-b)^2$.

20. Nech m, n sú prirodzené čísla také, že $m \geqq n \geqq 2$. Dokážte, že počet všetkých polynómov stupňa $2n-1$ s navzájom rôznymi koeficientmi z množiny $\{1, 2, \dots, 2m\}$, ktoré sú deliteľné polynómom $x^{n-1} + \dots + x + 1$, je

$$2^n n! \left[4\binom{m+1}{n+1} - 3\binom{m}{n} \right].$$