

2023/2024
73. ročník MO

Zadania úloh CAPS

(Súťaž sa konala 30. 6. – 3. 7. 2024.)

1. Rozhodnite, či existuje 2024 navzájom rôznych kladných celých čísel s nasledovnou vlastnosťou: Keď uvážime všetky možné podiely dvoch rôznych čísel (uvažujeme a/b aj b/a), tak dostaneme čísla s konečnými desatinnými rozvojmí (za desatinnou čiarkou) navzájom rôznych nenulových dĺžok. (Patrik Bak, Slovensko)

2. Pre kladné celé číslo n povieme, že n -konfigurácia pozostáva z množín (nie nutne rôznych) $A_{i,j}$ pre všetky celočíselné dvojice indexov (i, j) , kde $1 \leq i, j \leq n$. Hovoríme, že n -konfigurácia je *sladká*, ak pre každú dvojicu indexov (i, j) spĺňajúcu $1 \leq i \leq n-1$ a $1 \leq j \leq n$ platí $A_{i,j} \subseteq A_{i+1,j}$ a $A_{j,i} \subseteq A_{j,i+1}$. Nech $f(n, k)$ označuje počet sladkých n -konfigurácií, pre ktoré $A_{n,n} \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$. Rozhodnite, ktoré číslo je väčšie: $f(2024, 2024^2)$ alebo $f(2024^2, 2024)$. (Wojciech Nadara, Poľsko)

3. Nech ABC je trojuholník a D bod na strane BC . Body E, F ležia postupne na priamkach AB, AC tak, že bod B leží medzi bodmi A a E spĺňajúc $|BE| = |BD|$ a bod C leží medzi bodmi A a F spĺňajúc $|CF| = |CD|$. Nech P je taký bod, pre ktorý je D stredom kružnice vpísanej trojuholníku PEF . Dokážte, že bod P leží vo vnútornej oblasti kružnice Ω opísanej trojuholníku ABC alebo na nej. (Josef Tkadlec, ČR)

4. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, pre ktorý platí $|AB| = |BC| = |CD|$. Body X, Y ležia postupne na polpriamkach CA, BD tak, že $|BX| = |CY|$. Nech P, Q, R, S sú postupne stredy úsečiek BX, CY, XD, YA . Dokážte, že body P, Q, R, S ležia na kružnici. (Michal Pecho, SR)

5. Nech $\alpha \neq 0$ je reálne číslo. Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spĺňajúce

$$f(x^2 + y^2) = f(x - y)f(x + y) + \alpha yf(y)$$

pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$.

(Walther Janous, Rakúsko)

6. Rozhodnite, či existuje nekonečne veľa trojíc (a, b, c) kladných celých čísel takých, že p delí $\lfloor (a + b\sqrt{2024})^p \rfloor - c$ pre každé prvočíslo p . (Walther Janous, Rakúsko)