
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Zadania úloh domáceho kola kategórie B

1 Z cifier 1 až 9 vytvoríme 9-ciferné číslo s navzájom rôznymi ciframi. Potom každú jeho dvojicu po sebe idúcich cifier interpretujeme ako dvojciferné číslo a vezmeme jeho najmenší prvočíselný deliteľ. Môžeme tak získať práve dve rôzne prvočísla? Ak áno, určte všetky také dvojice prvočísel.

(Patrik Bak)

2 Nech ABC je trojuholník taký, že $\sphericalangle BAC = 45^\circ$. K stranám AB a AC sú zvonku pripísané pravouhlé rovnoramenné trojuholníky ABP a ACQ s preponami AB , resp. AC . Označme R stred úsečky PQ . Dokážte, že dĺžka úsečky AR je polovica polomeru kružnice opísanej trojuholníku ABC .

(Patrik Bak, Anastasia Bredichina)

3 Pre ktoré kladné prirodzené čísla n sa dá rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky n rozrezať na zhodné konvexné dieliky tvorené z

- a) 2,
- b) 3

rovnostranných trojuholníkov so stranou dĺžky 1?

(Pavel Calábek, Jaroslav Švrček)

4 a) Nájdite príklad dvojciferného prirodzeného čísla n takého, že číslo $1/n$ má vo svojom najkratšom desatinnom zápise za desatinnou čiarkou práve dve cifry.

b) Dokážte, že pre každé dve kladné prirodzené čísla k a l existujú práve dve kladné racionálne čísla, ktoré majú vo svojom najkratšom desatinnom zápise za desatinnou čiarkou práve k cifier a ich prevrátené hodnoty práve l cifier.

(Josef Tkadlec)

5 Označme k kružnicu opísanú ostrouhlému trojuholníku ABC . Nech jej obraz v súmernosti podľa priamky BC pretína polpriamky opačné k polpriamkam BA a CA v bodoch D , resp. E rôznych od B , resp. C . Nech sa úsečky CD a BE sa pretínajú na kružnici k . Určte všetky možné veľkosti uhla BAC .

(Patrik Bak)

6 Nech x , y , z sú kladné reálne čísla také, že $xy \geq 2$, $zx \geq 3$, $yz \geq 6$. Akú najmenšiu hodnotu môže nadobúdať výraz $13x^2 + 10y^2 + 5z^2$?

(Patrik Bak)

Termín odovzdania riešení: **21. 1. 2025**
