MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Návodné a doplňujúce úlohy
k úlohám domáceho kola kategórie B

1

N1 Nájdite všetky dvojciferné čísla, ktorých najmenším prvočíselným deliteľom je číslo 7.

N2 Dokážte, že každé zložené dvojciferné číslo má prvočíselného deliteľa menšieho ako 10.

D1 Nájdite všetky 3-ciferné čísla, ktoré pozostávajú len z číslic 1, 2, 3, 4 (nemusia byť použité všetky) a každé dvojciferné číslo určené jeho susednými číslicami je deliteľné číslom

a) 11;

b) 7.

D2 Janko napísal na tabuľu niekoľko rôznych prvočísel (aspoň tri). Keď sčítal ľubovoľné dve z nich a tento súčet zmenšil o 7, bolo výsledné číslo medzi napísanými. Ktoré čísla mohli na tabuli byť?

D3 Na tabuli je napísané štvorciferné číslo deliteľné 8, ktorého posledná cifra je 8. Keby sme poslednú cifru nahradili cifrou 7, získali by sme číslo deliteľné 9. Keby sme však poslednú cifru nahradili cifrou 9, získali by sme číslo deliteľné 7. Určte číslo, ktoré je napísané na tabuli.

D4 Na tabuli je napísaných niekoľko rôznych dvojciferných prirodzených čísel. Cifru c nazveme *dobrou*, ak súčet tých čísel z tabule, ktoré obsahujú cifru c, je 71.

a) Ktoré z cifier 0 až 9 môžu byť dobré?

b) Najviac koľko cifier môže byť dobrých súčasne?

2

N1 Ako v danom trojuholníku nájdeme stred opísanej kružnice?

N2 Majme pravouhlý rovnoramenný trojuholník ABC s preponou AB dĺžky 1. Určte veľkosti jeho vnútorných uhlov a dĺžky ramien.

N3 V štvoruholníku $ABCD$ označíme S, T, U, V postupne stredy strán AB, BC, CD, DA. Dokážte, že úsečka SU rozpoľuje úsečku VT.

N4 Nech ABC je trojuholník taký, že $|\sphericalangle ACB| = 90°$ a $|\sphericalangle BAC| = 30°$. Stranám AB a AC sú zvonka pripísané rovnostranné trojuholníky ABP a ACN. Označme S stred úsečky AB.

a) Dokážte, že priamky NS a AP sú rovnobežné.

b) Dokážte, že trojuholníky ABC a NSA sú zhodné.

c) Nech T, U sú postupne ťažiská trojuholníkov ABP, ACN. Dokážte, že trojuholníky TAU a PAC sú podobné, a určte koeficient ich podobnosti.

N5 Nech ABC je trojuholník taký, že $|\sphericalangle BAC| < 60°$. Obraz bodu B v osovej súmernosti podľa priamky AC označme D, obraz C podľa AB označme E a obraz B podľa AD označme F. Dokážte, že $|CF| = |DE|$.

Nasledujúce doplňujúce úlohy sú zamerané na vyjadrovanie dĺžok v trojuholníku pomocou jeho strán, resp. uhlov. Takéto vyjadrovanie nám vie prísť vhod pri čiastočnom alebo úplnom riešení niektorých geometrických úloh.

D1 Dokážte, že polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC s ostrým uhlom CAB je $|BC|\,/(2\sin|\sphericalangle CAB|)$.

D2 Nech ABC je trojuholník taký, že $|\sphericalangle CAB| = 45°$. Pomocou dĺžok strán CA a AB vyjadrite

a) dĺžku výšky na stranu AB;

b) dĺžku strany BC.

D3 Vyriešte predošlú úlohu pre trojuholník ABC taký, že $|\sphericalangle CAB| = 135°$.

Postupy z oboch úloh možno zovšeobecniť pre ľubovoľný uhol α, čo vyústi do vzťahu

$$|BC|^2 = |CA|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |CA| \cdot |AB| \cdot \cos|\sphericalangle CAB|,$$

ktorý je známy ako *kosínusová veta*.

D4 Nech ABC je trojuholník taký, že uhol CAB je tupý. Pätu výšky z vrcholu C označíme P. Pomocou dĺžok strán ABC vyjadrite $|PA|$. Ako sa zmení výsledok, ak by bol uhol CAB ostrý?

D5 Nech ABC je trojuholník a M je stred jeho strany AB. Dokážte, že platí

$$|CM|^2 = \frac{|BC|^2 + |CA|^2}{2} - \frac{|AB|^2}{4}.$$

D6 Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s najdlhšou stranou BC. Vnútri strán AB a AC ležia postupne body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme F taký bod, že $ABFC$ je rovnobežník. Dokážte, že $|FD| = |FE|$.

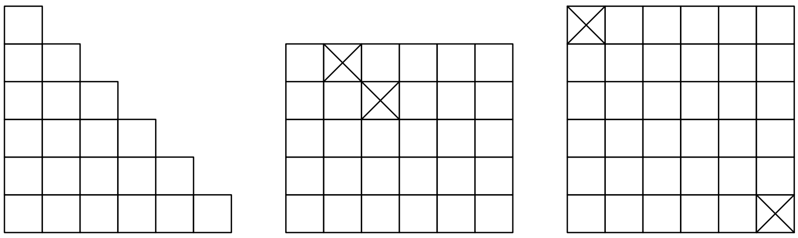
D7 Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s najdlhšou stranou BC. Vnútri jeho strán AB a AC ležia postupne body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Uvažujme ďalej body F a G tak, že $ABCF$ a $ACBG$ sú rovnobežníky. Dokážte, že $|FD| = |GE|$.

D8 Nech S je stred prepony AB pravouhlého trojuholníka ABC, ktorý nie je rovnoramenný. Označme D pätu výšky z vrcholu C a R priesečník osi vnútorného uhla pri vrchole C s preponou AB. Určte veľkosti vnútorných uhlov tohto trojuholníka, ak platí $|SR| = 2\,|DR|$.

3

N1 Nájdite všetky kladné prirodzené čísla n, pre ktoré možno štvorec rozmerov $n \times n$ rozrezať na dieliky tvaru obdĺžnika rozmerov 1×2.

N2 Uvažujme nasledovné tri útvary zložené z jednotkových štvorcov, z ktorých vystrihneme štvorce označené krížikom. Možno zvyšky útvarov rozrezať na dieliky tvaru obdĺžnika rozmerov 1×2?



N3 Dokážte, že pre každé kladné celé číslo n je súčet prvých n nepárnych čísel rovný n^2.

N4 *L-triomino* sa skladá z troch jednotkových štvorcov usporiadaných do tvaru písmena L. Pre ktoré hodnoty n z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ možno štvorec $n \times n$ rozrezať na dieliky tvaru L-triomina?

Odporúčame zoznámiť sa s matematickou indukciou. Môžete sa s ňou oboznámiť v knihe Antonína Vrbu *Princip matematické indukce* z edície *Škola mladých matematiků* (https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403889).

D1 Pre ktoré kladné celé čísla možno štvorec $n \times n$ rozrezať na dieliky tvaru L-triomina?

D2 Ľubovoľný jednotkový štvorček štvorčekovej siete $2^n \times 2^n$ zafarbíme načierno. Dokážte, že pre každé kladné celé číslo n možno túto štvorčekovú sieť pokryť dielikmi tvaru L-triomina tak, aby jedine tento čierny štvorček ostal nepokrytý.

D3 Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že $n \geq 4$ a štvorec so stranou dĺžky n je možné rozrezať na dieliky tvaru obdĺžnika rozmerov 1×4.

D4 Do štvorčekovej siete $n \times n$ chceme bez prekrývania umiestniť niekoľko pravouhlých rovnoramenných trojuholníkov s preponou dĺžky 2, ktorých vrcholy sa nachádzajú vo vrcholoch štvorčekovej siete a každá strana štvorčeka sa musí nachádzať v práve jednom trojuholníku (vnútri alebo na obvode). Nájdite všetky n, pre ktoré je to možné.

4

N1 Zistite, koľko desatinných miest majú v najkratšom možnom zápise za desatinnou čiarkou čísla 1/8, 1/32, 1/256.

N2 Zistite, pre ktoré kladné celé čísla n má číslo

a) $n/3$;

b) $n/30$;

c) $n/18$

konečný desatinný zápis.

N3 Dokážte, že kladné racionálne číslo q má vo svojom najkratšom desatinnom zápise práve d číslic za desatinnou čiarkou práve vtedy, keď $q = c/10^d$ pre nejaké kladné celé číslo c nedeliteľné 10.

N4 Nájdite všetky dvojice nesúdeliteľných kladných celých čísel (x, y) také, že platí

a) $xy = 441$;

b) $xy = 13^4 \cdot 14^n$, kde n je dané kladné celé číslo.

D1 Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel (a, b) také, že $4^a = b^2 + 7$.

D2 Nájdite všetky kladné celé čísla n také, že číslo $(2^n + 1)(3^n + 2)$ je deliteľné číslom 5^n.

D3 Rozhodnite, či existuje 2024 navzájom rôznych kladných celých čísel také, že všetky podiely dvoch rôznych čísel sú čísla s konečnými desatinnými rozvojmi za desatinnou čiarkou navzájom rôznych nenulových dĺžok.

D4 Rozhodnite, či existujú kladné celé čísla n a k také, že $\frac{n}{11^k - n}$ je druhou mocninou celého čísla.

D5 Dokážte, že existuje nekonečne veľa celých čísel, ktoré sa nedajú vyjadriť v tvare $2^a + 3^b - 5^c$, kde a, b, c sú nezáporné celé čísla.

Záujemcom o získanie celistvejších poznatkov z oblasti deliteľnosti celých čísel odporúčame knihu Františka Veselého *O dělitelnosti čísel celých* (https://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/403560) z edície *Škola mladých matematiků* (https://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/403423) a taktiež knihu Aloisa Apfelbecka *Kongruence*, (https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403650), ktorá obsahuje širokú potrebnú teóriu na prácu so zvyškami po delení.

---

5 Pred riešením tejto úlohy vám odporúčame zoznámiť sa s vetou o obvodovom a stredovom uhle a s vlastnosťami tetivových štvoruholníkov. K objaveniu tohto vzťahu navádza prvá návodná úloha. Odporúčame knihu Stanislava Horáka *Kružnice* (https://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/403589) z edície *Škola mladých matematiků* (https://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/403423).

N1 Na kružnici k so stredom O sú dané body B a C také, že $|\sphericalangle BOC| = 120°$. Zvoľme bod A na dlhšom oblúku s krajnými bodmi B a C a nech $\delta = |\sphericalangle AOB|$.

a) Zistite veľkosť uhla BAC, keď $\delta = 140°$.

b) Zistite, ako máme voliť uhol δ, aby mal uhol BAC čo najväčšiu veľkosť.

c) Ako sa zmení výsledok úlohy b), ak bod A môžeme zvoliť ľubovoľne na kružnici k (s výnimkou bodov B a C)?

N2 Štvoruholník je tetivový práve vtedy, keď súčet jeho protiľahlých uhlov je 180°.

N3 Dokážte, že oblúkom rovnakej dĺžky tej istej kružnice prislúchajú obvodové uhly rovnakej veľkosti.

N4 Označme S stred toho oblúka s krajnými bodmi B a C kružnice opísanej trojuholníku ABC, ktorý neobsahuje bod A. Dokážte, že AS je osou uhla BAC.

N5 Dve zhodné kružnice k a l sa pretínajú v bodoch A a B. Na kružnici k zvolíme bod C a na kružnici l bod D tak, aby bod A bol vnútorným bodom úsečky CD. Dokážte, že $|BC| = |BD|$.

N6 Nech trojuholník ABC má pravým uhol pri vrchole B. Označme I stred kružnice do neho vpísanej a M stred prepony AC. Predpokladajme, že body B, I, M, C ležia na jednej kružnici. Určte veľkosť uhla BAC.

D1 Dokážte, že stredy kružníc zvonka pripísaných k jednotlivým stranám ľubovoľného konvexného štvoruholníka ležia na jednej kružnici.

D2 Nech D je ľubovoľný vnútorný bod strany AB trojuholníka ABC. Na polpriamkach BC a AC zvoľme postupne body E a F tak, aby platilo $|BD| = |BE|$ a $|AD| = |AF|$. Dokážte, že body C, E, F a stred I kružnice vpísanej do trojuholníka ABC ležia na jednej kružnici.

D3 Nech ABC je ostrouhlý trojuholník a D, E, F ABC päty jeho výšok postupne na strany AB, BC, CA. Obraz bodu F v stredovej súmernosti podľa stredu strany AB leží na priamke DE. Určte veľkosť uhla BAC.

D4 Nech ABC je pravouhlý trojuholník. Na jeho prepone BC ležia body D a E také, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Nech F je taký vnútorný bod trojuholníka ABC, že DEF je pravouhlý rovnoramenný trojuholník s preponou DE. Aká je veľkosť uhla BFC?

D5 Nech $ABCD$ je kosoštvorec s kratšou uhlopriečkou BD a E vnútorný bod jeho strany CD, ktorý leží na kružnici opísanej trojuholníku ABD. Určte veľkosť jeho uhla pri vrchole DAB, ak majú kružnice opísané trojuholníkom ACD a BCE práve jeden spoločný bod.

---

6 Návodné úlohy N1 až N3 sú zamerané na úpravy výrazov na *štvorce*, čím myslíme druhé mocniny mnohočlenov (v našom prípade dvojčlenov). Takéto úpravy sú často kľúčovými pri dokazovaní nerovností či hľadaní extrémov výrazov, čo si môžete vyskúšať v úlohách N4 a N9. Úloha N7 upozorňuje na nesprávne riešenie úlohy N5, ktorá je podobná aj samotnej súťažnej úlohe. Úloha N8 naznačuje, ako možno túto nesprávnu úvahu opraviť.

N1 Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a a b platí $a^2 + b^2 \geq 2ab$, pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď

$a = b$.

N2 Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c platí $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, pričom rovnosť nastáva práve v prípade $a = b = c$.

N3 Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c platí

a) $5a^2 + 6b^2 + 7c^2 \geq 4ab + 6ac + 8bc$;

b) $3a^2 + 3b^2 + 8c^2 \geq 4(ab + ac + bc)$;

c) $5a^2 + 5b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 4ac + 4bc$.

Určte všetky trojice čísel (a, b, c), pre ktoré nastáva v jednotlivých prípadoch rovnosť.

N4 Kladné reálne čísla x a y sú také, že $xy \geq 2$. Akú najmenšiu hodnotu môže nadobudnúť výraz $4x^2 + 9y^2$?

N5 Nezáporné reálne čísla x, y, z sú také, že $x + y \geq 6$, $z + x \geq 8$, $y + z \geq 10$. Akú najmenšiu hodnotu môže nadobudnúť výraz $x^2 + y^2 + z^2$?

N6 Nezáporné reálne čísla x, y, z sú také, že $x + y \geq 4$, $z + x \geq 8$, $y + z \geq 10$. Akú najmenšiu hodnotu môže nadobudnúť výraz $x^2 + y^2 + z^2$?

N7 Rozhodnite, či je nasledovné riešenie úlohy N5 úplné a korektné: Keďže chceme dostať čo najmenšiu hodnotu výrazu $x^2+y^2+z^2$, tak chceme, aby aj výrazy $x+y$, $z+x$, $y+z$ nadobúdali čo najmenšie hodnoty, teda aby v nerovnostiach zo zadania bola rovnosť. Dostávame tak sústavu troch rovníc $x+y = 6$, $z+x = 8$, $y+z = 10$, z čoho $(x, y, z) = (2, 4, 6)$. Najmenšia hodnota je teda dosiahnutá pri tomto riešení a je to $2^2 + 4^2 + 6^2$ čiže 56.

N8 Dokážte, že pri riešení úlohy N5 sa stačí obmedziť na trojice (x, y, z) také, že platia aspoň dve z rovností $x + y = 6$, $z + x = 8$, $y + z = 10$.

N9 Nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu $9x^2 + 36/x^2$, ak

a) $x \in (0, \infty)$;

b) $x \in (0, 1]$;

c) $x \in [2, \infty)$;

D1 Dokážte, že pre ľubovoľné dve nezáporné reálne čísla x a y platí nerovnosť

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy},$$

pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x = y$.

(Tejto nerovnosti sa hovorí nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom a platí aj pre viac ako dve čísla, teda nerovnosť $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n \geq \sqrt{n}x_1x_2 \dots x_n$ platí pre ľubovoľných n nezáporných reálnych čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$.)

D2 Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla k a m je funkcia f, kde $f(x) = kx - m/x$ na intervale $(0, \infty)$ rastúca.

D3 Nech k a m sú kladné reálne čísla a f je funkcia taká, že $f(x) = kx^2 + m/x^2$ pre každé kladné reálne číslo x. Nech $M = \sqrt[4]{m/k}$. Dokážte, že funkcia f nadobúda v M minimum, na intervale $(0, M]$ je klesajúca a na intervale $[M, \infty)$ je rastúca.

D4 Nech k a m sú kladné reálne čísla a f je funkcia taká, že $f(x) = kx^2 + m/x$ pre každé kladné reálne číslo x. Nech $M = \sqrt{m/k}$. Dokážte, že funkcia f nadobúda v M minimum, na intervale $(0, M]$ je klesajúca a na intervale $[M, \infty)$ je rastúca.

D5 Určte najmenšiu hodnotu výrazu $x^2 + \frac{2}{1+2x^2}$, kde x je ľubovolné reálne číslo. Pre ktoré x túto hodnotu nadobúda?

D6 Nech a a b sú nezáporné reálne čísla také, že $a + b = 2$. Určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu výrazu $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$.

D7 Nech a a b sú nezáporné reálne čísla také, že $a^2 + b^2 = 1$. Určte najmenšiu aj najväčšiu možnú hodnotu výrazu $\frac{a^4+b^4+ab+1}{a+b}$.

D8 Nech a a b sú reálne čísla také, že $a - b \geq 2$. Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu $a^4 + b^4$.

D9 Nájdite maximálnu hodnotu výrazu $a^2 + b^2 + c^2$, kde a, b, c sú reálne čísla také, že všetky tri čísla $a + b$, $b + c$, $c + a$ sú z intervalu $[0, 1]$.

D10 Súčet 74 (nie nutne rôznych) reálnych čísel z uzavretého intervalu $[4, 10]$ je 356. Určte najväčšiu možnú hodnotu súčtu ich druhých mocnín.

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie B

1

N1 Nájdite všetky dvojciferné čísla, ktorých najmenším prvočíselným deliteľom je číslo 7.

Riešenie:

Sú to čísla $7 \cdot 7$, $7 \cdot 11$, $7 \cdot 13$, t. j. 49, 77, 91. Musí ísť o násobky 7, t. j. čísla tvaru $7 \cdot k$, pričom k nemôže mať menšieho prvočíselného deliteľa ako 7. To vylučuje hodnoty k z $\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14\}$. Ak $k \geq 15$, tak číslo $7 \cdot k$ má už viac ako dve cifry.

N2 Dokážte, že každé zložené dvojciferné číslo má prvočíselného deliteľa menšieho ako 10.

Riešenie:

Sporom. Čo ak by existovalo dvojciferné zložené číslo, ktorého každý prvočíselný deliteľ je aspoň 10? Keďže ide o zložené číslo, musí mať v prvočíselnom rozklade aspoň dve prvočísla, no tie musia byť aspoň 10, čiže uvažované číslo by bolo aspoň 100, a teda nie dvojciferné.

D1 Nájdite všetky 3-ciferné čísla, ktoré pozostávajú len z číslic 1, 2, 3, 4 (nemusia byť použité všetky) a každé dvojciferné číslo určené jeho susednými číslicami je deliteľné číslom

a) 11;

b) 7.

Riešenie:

a) Čísla 111, 222, 333, 444, keďže dvojciferné čísla deliteľné 11 sú práve tie s rovnakými ciframi.

b) 142, 214, 421. Možné dvojciferné čísla deliteľné 7 sú 14, 21 a 42, pričom z nich musíme musíme vybrať dve tak, aby posledná cifra prvého čísla bola totožná s prvou cifrou druhého čísla.

D2 Janko napísal na tabuľu niekoľko rôznych prvočísel (aspoň tri). Keď sčítal ľubovoľné dve z nich a tento súčet zmenšil o 7, bolo výsledné číslo medzi napísanými. Ktoré čísla mohli na tabuli byť?

Riešenie:

63-B-II-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=1078).

D3 Na tabuli je napísané štvorciferné číslo deliteľné 8, ktorého posledná cifra je 8. Keby sme poslednú cifru nahradili cifrou 7, získali by sme číslo deliteľné 9. Keby sme však poslednú cifru nahradili cifrou 9, získali by sme číslo deliteľné 7. Určte číslo, ktoré je napísané na tabuli.

Riešenie:

58-B-I-1 (https://skmo.sk/dokument.php?id=29).

D4 Na tabuli je napísaných niekoľko rôznych dvojciferných prirodzených čísel. Cifru c nazveme *dobrou*, ak súčet tých čísel z tabule, ktoré obsahujú cifru c, je 71.

a) Ktoré z cifier 0 až 9 môžu byť dobré?

b) Najviac koľko cifier môže byť dobrých súčasne?

Riešenie:

71-C-II-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=4055#page=3).

2

N1 Ako v danom trojuholníku nájdeme stred opísanej kružnice?

Riešenie:

Stred kružnice opísanej trojuholníku sa nachádza na priesečníku osí jeho strán.

N2 Majme pravouhlý rovnoramenný trojuholník ABC s preponou AB dĺžky 1. Určte veľkosti jeho vnútorných uhlov a dĺžky ramien.

Riešenie:

$90°$, $45°$, $45°$ a ramená dĺžky $\sqrt{2}/2$. Rovnoramenný trojuholník má uhly pri základni rovnako veľké. Nemôžu byť oba pravé. Preto ide o uhly BAC a ABC, ktorých súčet je $180° - 90°$ čiže $90°$, teda každý z nich má $45°$. Dĺžku ramena označme r. Z Pytagorovej vety potom platí $r^2 + r^2 = 1^2$, čiže $r = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$.

N3 V štvoruholníku $ABCD$ označíme S, T, U, V postupne stredy strán AB, BC, CD, DA. Dokážte, že úsečka SU rozpoľuje úsečku VT.

Riešenie:

Úsečka ST je strednou priečkou trojuholníka ACB a úsečka VU je strednou priečkou trojuholníka ACD. Preto sú úsečky ST a VU rovnobežné s uhlopriečkou AC, a teda aj rovnobežné navzájom. Analogicky sú rovnobežné aj úsečky VS a TU. Preto je $STUV$ rovnobežník a jeho uhlopriečky, teda úsečky SU a VT, sa rozpoľujú.

N4 Nech ABC je trojuholník taký, že $|\sphericalangle ACB| = 90°$ a $|\sphericalangle BAC| = 30°$. Stranám AB a AC sú zvonka pripísané rovnostranné trojuholníky ABP a ACN. Označme S stred úsečky AB.

a) Dokážte, že priamky NS a AP sú rovnobežné.

b) Dokážte, že trojuholníky ABC a NSA sú zhodné.

c) Nech T, U sú postupne ťažiská trojuholníkov ABP, ACN. Dokážte, že trojuholníky TAU a PAC sú podobné, a určte koeficient ich podobnosti.

Riešenie:

a) Nech M je stred strany AC. Priamka SM je strednou priečkou trojuholníka ABC, preto je rovnobežná so stranou CB, teda kolmá na stranu AC. Preto je priamka SM aj osou strany AC, na ktorej leží aj bod N vďaka rovnoramennosti trojuholníka ACN. Teda priamka NS je kolmá na stranu AC. Na stranu AC je však kolmá aj priamka AP, keďže $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle BAP| = 90°$.

b) Taktiež platí $|\sphericalangle SAN| = |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAN| = 90°$. Keďže priamka SN je osou strany AC rovnoramenného trojuholníka ACN, je aj osou protiľahlého uhla, teda $|\sphericalangle SNA| = 30°$. Trojuholníky ABC a NSA sa tak zhodujú vo vnútorných uhloch a v stranách AN a AC, preto sú podľa vety *usu* zhodné.

c) Ťažnica v rovnostrannom trojuholníku je zároveň aj osou uhla, preto $|\sphericalangle TAU| = 30° + 30° + 30° = 90° = |\sphericalangle PAC|$. Ťažnica rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky x má dĺžku $x\sqrt{3}/2$ (z Pytagorovej vety), teda vzdialenosť jeho vrcholu od ťažiska je $2/3 \cdot x\sqrt{3}/2$ čiže $x\sqrt{3}/3$. Preto $|AT| / |AP| = |AU| / |AC| = \sqrt{3}/3$. Podobnosť trojuholníkov TAU a PAC tak vyplýva z vety *sus* a hľadaný koeficient podobnosti je $\sqrt{3}/3$.

N5 Nech ABC je trojuholník taký, že $|\sphericalangle BAC| < 60°$. Obraz bodu B v osovej súmernosti podľa priamky AC označme D, obraz C podľa AB označme E a obraz B podľa AD označme F. Dokážte, že $|CF| = |DE|$.

Riešenie:

70-B-S-2 https://skmo.sk/dokument.php?id=3476#page=2).

Nasledujúce doplňujúce úlohy sú zamerané na vyjadrovanie dĺžok v trojuholníku pomocou jeho strán, resp. uhlov. Takéto vyjadrovanie nám vie prísť vhod pri čiastočnom alebo úplnom riešení niektorých geometrických úloh.

D1 Dokážte, že polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC s ostrým uhlom CAB je $|BC| / (2 \sin |\sphericalangle CAB|)$.

Riešenie:

Označme O stred opísanej kružnice, R jej polomer a S stred strany BC. Z vety o obvodovom a stredovom $|\sphericalangle BOC| = 2\,|\sphericalangle CAB|$. Keďže $|OB| = |OC| = R$, platí $|\sphericalangle BOS| = |\sphericalangle CAB|$. Z pravouhlého trojuholníka BOS tak máme $\sin |\sphericalangle CAB| = |BS| / R$, teda $R = |BC| / (2 \sin |\sphericalangle BAC|)$.

Poznámka:

Ak $|\sphericalangle CAB| \geq 90°$, tak dostaneme tiež $R = |BC| / (2 \sin(180° - |\sphericalangle CAB|) = |BC| / (2 \sin |\sphericalangle CAB|)$.

D2 Nech ABC je trojuholník taký, že $|\sphericalangle CAB| = 45°$. Pomocou dĺžok strán CA a AB vyjadrite

a) dĺžku výšky na stranu AB;

b) dĺžku strany BC.

Riešenie:

Nech P je päta výšky na stranu AB.

a) Trojuholník APC je rovnoramenný pravouhlý s preponou AC, preto $|CP| = |CA| / \sqrt{2} = \sqrt{2}/2 \cdot |CA|$.

b) Podľa Pytagorovej vetou z pravouhlého trojuholníka BCP, kde $|PB| = \big||AB| - |AC| / \sqrt{2}\big|$,

$$|BC|^2 = \left(|AB| - \frac{|CA|}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{|CA|}{\sqrt{2}}\right)^2 = |CA|^2 + |AB|^2 - |CA| \cdot |AB| \cdot \sqrt{2},$$

teda
$$|BC| = \sqrt{|CA|^2 + |AB|^2 - |CA| \cdot |AB| \cdot \sqrt{2}}.$$

D3 Vyriešte predošlú úlohu pre trojuholník ABC taký, že $|\sphericalangle CAB| = 135°$.

Riešenie:

Rovnako dostaneme $|CP| = |CA|/\sqrt{2}$. Jediný rozdiel je v tom, že teraz $|PB| = |AB| + |CA|/\sqrt{2}$. Z Pytagorovej vety pre trojuholník BCP dostaneme $|BC| = \sqrt{|CA|^2 + |AB|^2 + |CA| \cdot |AB| \cdot \sqrt{2}}$.

Postupy z oboch úloh možno zovšeobecniť pre ľubovoľný uhol α, čo vyústi do vzťahu
$$|BC|^2 = |CA|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |CA| \cdot |AB| \cdot \cos |\sphericalangle CAB|,$$
ktorý je známy ako *kosínusová veta*.

D4 Nech ABC je trojuholník taký, že uhol CAB je tupý. Pätu výšky z vrcholu C označíme P. Pomocou dĺžok strán ABC vyjadrite $|PA|$. Ako sa zmení výsledok, ak by bol uhol CAB ostrý?

Riešenie:

Z Pytagorových viet pre pravouhlé trojuholníky ACP a BCP vyjadríme výšku dvomi spôsobmi: $|AB|^2 - |PA|^2 = |CP|^2 = |BC|^2 - (|AB| + |PA|)^2$, z čoho $|PA| = (|BC|^2 - |CA|^2 - |AB|^2)/(2\,|AB|)$.

Ak je uhol CAB ostrý, tak postupujeme analogicky s tým rozdielom, že $|PB| = |BC| - |PA|$, a dostaneme $|PA| = (|CA|^2 + |AB|^2 - |BC|^2)/(2\,|AB|)$.

D5 Nech ABC je trojuholník a M je stred jeho strany AB. Dokážte, že platí
$$|CM|^2 = \frac{|BC|^2 + |CA|^2}{2} - \frac{|AB|^2}{4}.$$

Riešenie 1:

Dôkaz uvedieme pre trojuholník s ostrými uhlami CAB a ABC. Dôkazy zvyšných prípadov, ktoré sa líšia len mierne, prenechávame na čitateľa. Označme P pätu výšky z bodu C. Nech $x = |PA|$ a $y = |PB|$, potom platí $x+y = |AB|$. Potom $|PM| = |x-y|/2$ a z pravouhlého trojuholníka CMP máme $|CM|^2 = |PC|^2 + (x-y)^2/4$. Dokazovanú rovnosť tak vieme ekvivalentne upraviť na $4\,|PC|^2 + (x-y)^2 = 2\,|BC|^2 + 2\,|CA|^2 - (x+y)^2$ a následne na $4\,|PC|^2 = 2(|BC|^2 - y^2) + 2(|CA|^2 - x^2)$, ktorej dôkaz dokončíme s využitím vzťahov $|BC|^2 - y^2 = |CA|^2 - x^2 = |CM|^2$, ktoré vyplývajú z Pytagorových viet pre trojuholníky ACP a CPB.

Riešenie 2:

Podľa kosínusových viet v trojuholníkoch AMC a BMC dostávame
$$|BC|^2 = |BM|^2 + |CM|^2 - 2 \cdot |BM| \cdot |CM| \cdot \cos |\sphericalangle BMC|,$$
$$|CA|^2 = |AM|^2 + |CM|^2 - 2 \cdot |AM| \cdot |CM| \cdot \cos |\sphericalangle AMC|.$$
Keďže $|AM| = |BM| = \frac{|AB|}{2}$ a $\cos |\sphericalangle BMC| = \cos(180° - |\sphericalangle AMC|) = -\cos |\sphericalangle BMC|$, po sčítaní týchto dvoch vzťahov
$$|BC|^2 + |CA|^2 = 2 \cdot \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 + 2\,|CM|^2,$$
z čoho po úprave dostávame dokazovaný vzťah.

D6 Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s najdlhšou stranou BC. Vnútri strán AB a AC ležia postupne body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Označme F taký bod, že $ABFC$ je rovnobežník. Dokážte, že $|FD| = |FE|$.

Riešenie:

71-B-I-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3924).

D7 Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s najdlhšou stranou BC. Vnútri jeho strán AB a AC ležia postupne body D a E tak, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$. Uvažujme ďalej body F a G tak, že $ABCF$ a $ACBG$ sú rovnobežníky. Dokážte, že $|FD| = |GE|$.

Riešenie:

71-B-S-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3928#page=2).

D8 Nech S je stred prepony AB pravouhlého trojuholníka ABC, ktorý nie je rovnoramenný. Označme D pätu výšky z vrcholu C a R priesečník osi vnútorného uhla pri vrchole C s preponou AB. Určte veľkosti vnútorných uhlov tohto trojuholníka, ak platí $|SR| = 2\,|DR|$.

Riešenie:

64-B-I-5 (https://skmo.sk/dokument.php?id=1337#page=5).

3

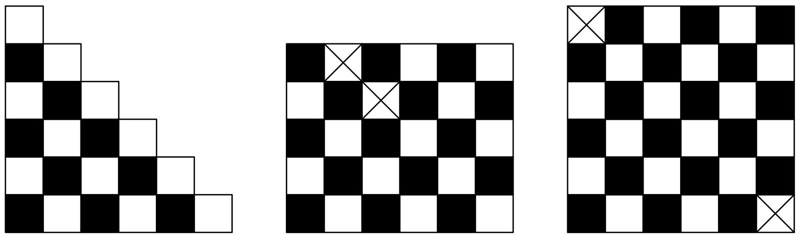
N1 Nájdite všetky kladné prirodzené čísla n, pre ktoré možno štvorec rozmerov $n \times n$ rozrezať na dieliky tvaru obdĺžnika rozmerov 1×2.

Riešenie:

V prípade párneho n rozrežeme štvorec na $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ štvorcov 2×2 a každý z nich na dva obdĺžniky 2×1. Takéto n teda vyhovuje.

V prípade nepárneho n má štvorec obsah n^2 a jeden dielik má obsah 2. Číslo n^2 však nie je deliteľné 2, preto takéto n nevyhovuje.

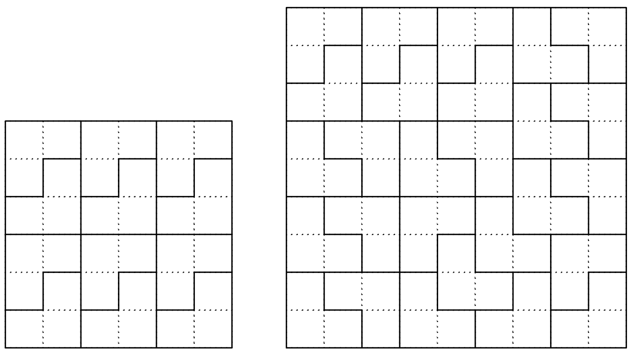
N2 Uvažujme nasledovné tri útvary zložené z jednotkových štvorcov, z ktorých vystrihneme štvorce označené krížikom. Možno zvyšky útvarov rozrezať na dieliky tvaru obdĺžnika rozmerov 1×2?



Riešenie:

Vo všetkých prípadoch je odpoveď nie.

Každý z útvarov vyfarbíme šachovnicovo bielou a čiernou farbou. Jeden dielik zakrýva jeden štvorček bielej a jeden čiernej farby. Ak by sme teda vedeli útvar rozstrihať na dieliky, tak musí mať rovnako veľa čiernych a bielych štvorčekov, čo však nie je ani v jednom prípade pravda.



N3 Dokážte, že pre každé kladné celé číslo n je súčet prvých n nepárnych čísel rovný n^2.

Riešenie:

Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou:

1) Ak $n = 1$, tak $1 = 1^2 = n^2$.
2) Ak je súčet prvých n nepárnych čísel rovný n^2, tak po pripočítaní $(n + 1)$. nepárneho čísla, t. j. čísla $2(n + 1) - 1$, dostaneme súčet $n^2 + (2n + 1)$ čiže $(n + 1)^2$.

N4 *L-triomino* sa skladá z troch jednotkových štvorcov usporiadaných do tvaru písmena L. Pre ktoré hodnoty n z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ možno štvorec $n \times n$ rozrezať na dieliky tvaru L-triomina?

Riešenie:

Štvorec má plochu n^2 a jeden dielik má plochu 3. Preto n^2, a teda aj n, musí byť deliteľné 3. Štvorec 3×3 nie je možné rozrezať na základe jednoduchého rozboru prípadov. Štvorce 6×6 a 9×9 rozrežeme ako na obrázkoch:

Odporúčame zoznámiť sa s matematickou indukciou. Môžete sa s ňou oboznámiť v knihe Antonína Vrbu *Princip matematické indukce* z edície *Škola mladých matematiků* (https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403889).

D1 Pre ktoré kladné celé čísla možno štvorec $n \times n$ rozrezať na dieliky tvaru L-triomina?

Riešenie:

Pre násobky troch väčšie ako 3. Stačí doplniť riešenie návodnej úlohy N4 o rozrezanie štvorcov, ktorých dĺžka strany je deliteľná 3. Štvorec $6k \times 6k$ rozrežeme na obdĺžniky 3×2 a každý z nich rozrežeme na dve L-triominá. Štvorce rozmerov $(6k+3) \times (6k+3)$ rozrežeme s využitím matematickej indukcie. Keďže vieme rozrezať obdĺžnik 3×2, tak vieme rozrezať aj obdĺžnik $3 \times 6k$. Štyri takéto obdĺžniky vieme uložiť pozdĺž hranice štvorca $(6k+3) \times (6k+3)$, čím v strede ostane štvorec $(6k-3) \times (6k-3)$, ktorý vieme rozrezať podľa indukčného predpokladu.

D2 Ľubovoľný jednotkový štvorček štvorčekovej siete $2^n \times 2^n$ zafarbíme načierno. Dokážte, že pre každé kladné celé číslo n možno túto štvorčekovú sieť pokryť dielikmi tvaru L-triomina tak, aby jedine tento čierny štvorček ostal nepokrytý.

Riešenie:

Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou:

1) V štvorci 2×2 tvoria biele políčka práve jedno L-triomino.
2) Predpokladajme, že takto vieme pokryť štvorec rozmerov $2^n \times 2^n$, a to bez ohľadu na polohu čierneho štvorčeka. Štvorec $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ rozdelíme na štyri štvorce $2^n \times 2^n$. V tých troch z nich, ktoré nemajú čierne políčko, zafarbíme načierno rohové políčka v strede veľkého štvorca. Tieto tri políčka možno pokryť L-triominom. A podľa indukčného predpokladu teraz aj každý zo štvorcov $2^n \times 2^n$ vieme pokryť L-triominami.

Poznámka:

Podrobnejšie riešenie možno nájsť je v riešení 8. úlohy 1. zimného kola KMS 2009/2010 (https://old.kms.sk/docs/vzoraky/20092010/zim/seria1.pdf?s=1&t=zim&r=2009#page=5).

D3 Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že $n \geq 4$ a štvorec so stranou dĺžky n je možné rozrezať na dieliky tvaru obdĺžnika rozmerov 1×4.

Riešenie:

Všetky násobky 4.

Ak je n nepárne, tak štvorec má plochu n^2, čo nie je násobok plochy dielika.

Ak $n = 4k + 2$, tak rozdelíme štvorec na $(2k+1) \times (2k+1)$ menších štvorcov 2×2, ktoré šachovnicovo zafarbíme. Každý dielik sa musí skladať z dvoch čiernych a z dvoch bielych štvorcov 1×1, čiže obsahuje rovnako veľa štvorcov čiernej a bielej farby. Avšak celý štvorec obsahuje z jednej farby viac.

Ak $n = 4k$, tak štvorec rozrežeme na $k \times k$ štvorcov rozmerov 4×4 a každý z nich tromi rovnobežnými rezmi na štyri obdĺžniky 1×4.

D4 Do štvorčekovej siete $n \times n$ chceme bez prekrývania umiestniť niekoľko pravouhlých rovnoramenných trojuholníkov s preponou dĺžky 2, ktorých vrcholy sa nachádzajú vo vrcholoch štvorčekovej siete a každá strana štvorčeka sa musí nachádzať v práve jednom trojuholníku (vnútri alebo na obvode). Nájdite všetky n, pre ktoré je to možné.

Riešenie:

KMS 39. ročník, 1. časť, 2. kolo, úloha 8 (https://kms.sk/ulohy/zadania/1381).

4

N1 Zistite, koľko desatinných miest majú v najkratšom možnom zápise za desatinnou čiarkou čísla 1/8, 1/32, 1/256.

Riešenie:

Majú postupne 3, 5, 8 cifier.

Okrem písomného vydelenia to možno zistiť aj rozšírením zlomku vhodnou mocninou 5: $1/8 = 5^3/10^3$, $1/32 = 5^5/10^5$ a $1/256 = 5^8/10^8$.

N2 Zistite, pre ktoré kladné celé čísla n má číslo

a) $n/3$;

b) $n/30$;

c) $n/18$

konečný desatinný zápis.

Riešenie:

Zlomok (s celočíselným čitateľom a (kladným) celočíselným menovateľom) v základnom tvare má konečný desatinný zápis práve vtedy, keď jeho menovateľ nemá vo svojom prvočíselnom rozklade iné prvočísla ako 2 a 5.

Toto pozorovanie je presnejšie sformulované a dokázané v nasledovnej návodnej úlohe. Zlomky $n/3$ a $n/30$ z častí a), b) obsahujú v menovateli prvočíslo 3. Ak majú konečný desatinný zápis, tak aj ich čitateľ, teda číslo n, musí byť deliteľný 3, aby sa pri prevode na základný tvar 3 v menovateli vykrátila.

Naopak, ak $n = 3k$ pre nejaké k, tak dostávame zlomky $k/1$ a $k/10$ s konečným desatinným zápisom.

V časti c) je menovateľ deliteľný 3^2 čiže 9 a rovnako tak dostaneme, že aj n musí byť deliteľné 9. Tiež ak $n = 9k$, tak $n/18 = k/2$, čo má konečný desatinný zápis.

N3 Dokážte, že kladné racionálne číslo q má vo svojom najkratšom desatinnom zápise práve d číslic za desatinnou čiarkou práve vtedy, keď $q = c/10^d$ pre nejaké kladné celé číslo c nedeliteľné 10.

Riešenie:

Nech q má d číslic v desatinnom zápise. Keď v čísle q posunieme desatinnú čiarku o d miest doprava, teda ho vynásobíme číslom 10^d, tak dostaneme celé číslo $q \cdot 10^d$, ktoré označíme c. Toto číslo nemôže končiť 0, keďže išlo o najkratší možný zápis čísla q. Preto $q = c/10^d$.

Opačne, ak $q = c/10^d$, tak q má za desatinnou čiarkou práve d posledných cifier čísla c. Keďže c nie je deliteľné 10, ide o najkratší možný zápis.

N4 Nájdite všetky dvojice nesúdeliteľných kladných celých čísel (x, y) také, že platí

a) $xy = 441$;
b) $xy = 13^4 \cdot 14^n$, kde n je dané kladné celé číslo.

Riešenie:

a) Platí $441 = 3^2 \cdot 7^2$. Keďže x a y sú nesúdeliteľné, prvočíslo 3 sa môže vyskytnúť v prvočíselnom rozklade len jedného z čísel x a y. To isté platí aj pre prvočíslo 7. Máme preto štyri možné dvojice (x, y), a to $(1, 3^2 \cdot 7^2)$, $(3^2, 7^2)$, $(7^2, 3^2)$, $(3^2 \cdot 7^2, 1)$.
b) Riešime podobne s tým, že uvažujeme rozklad $2^n \cdot 7^n \cdot 13^4$, ktorý teraz obsahuje tri prvočísla. Dostaneme osem riešení, a to $(1, 13^4 \cdot 14^n)$, $(2^n, 13^4 \cdot 7^n)$, $(7^n, 13^4 \cdot 7^n)$, $(13^4, 14^n)$, $(14^n, 13^4)$, $(2^n \cdot 13^4, 7^n)$, $(7^n \cdot 13^4, 2^n)$, $(13^4 \cdot 14^n, 1)$.

D1 Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel (a, b) také, že $4^a = b^2 + 7$.

Riešenie:

KMS 42. ročník, 1. časť, 2. kolo (https://kms.sk/ulohy/riesenia/1977).

D2 Nájdite všetky kladné celé čísla n také, že číslo $(2^n + 1)(3^n + 2)$ je deliteľné číslom 5^n.

Riešenie:

61-A-S-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=425#page=4).

D3 Rozhodnite, či existuje 2024 navzájom rôznych kladných celých čísel také, že všetky podiely dvoch rôznych čísel sú čísla s konečnými desatinnými rozvojmi za desatinnou čiarkou navzájom rôznych nenulových dĺžok.

Riešenie:

CAPS 2024, úloha 1 (https://skmo.sk/dokument.php?id=5328).

D4 Rozhodnite, či existujú kladné celé čísla n a k také, že $\frac{n}{11^k - n}$ je druhou mocninou celého čísla.

Riešenie:

67-A-II-4 (https://skmo.sk/dokument.php?id=2537#page=5).

D5 Dokážte, že existuje nekonečne veľa celých čísel, ktoré sa nedajú vyjadriť v tvare $2^a + 3^b - 5^c$, kde a, b, c sú nezáporné celé čísla.

Riešenie:

68-A-III-5 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3121#page=8).

Záujemcom o získanie celistvejších poznatkov z oblasti deliteľnosti celých čísel odporúčame knihu Františka Veselého *O dělitelnosti čísel celých* (https://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/403560) z edície *Škola mladých matematiků* (https://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/403423) a taktiež knihu Aloisa Apfelbecka *Kongruence*, (https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403650), ktorá obsahuje širokú potrebnú teóriu na prácu so zvyškami po delení.

5

Pred riešením tejto úlohy vám odporúčame zoznámiť sa s vetou o obvodovom a stredovom uhle a s vlastnosťami tetivových štvoruholníkov. K objaveniu tohto vzťahu navádza prvá návodná úloha. Odporúčame knihu Stanislava Horáka *Kružnice* (https://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/403589) z edície *Škola mladých matematiků* (https://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/403423).

N1 Na kružnici k so stredom O sú dané body B a C také, že $|\sphericalangle BOC| = 120°$. Zvoľme bod A na dlhšom oblúku s krajnými bodmi B a C a nech $\delta = |\sphericalangle AOB|$.

a) Zistite veľkosť uhla BAC, keď $\delta = 140°$.

b) Zistite, ako máme voliť uhol δ, aby mal uhol BAC čo najväčšiu veľkosť.

c) Ako sa zmení výsledok úlohy b), ak bod A môžeme zvoliť ľubovoľne na kružnici k (s výnimkou bodov B a C)?

Riešenie:

V rovnoramenných trojuholníkoch BOC, COA a AOB vypočítajte veľkosti ich uhlov alebo ich vyjadrite v závislosti od uhla δ. Dajte si pozor na správne sčítavanie, resp. odčítavanie uhlov podľa toho, či bod O je vnútri, alebo mimo trojuholníka ABC. V a) vyjde $|\sphericalangle BAC| = 60°$, rovnako ako v b) nezávisle na voľbe δ. V c) vyjde 120°.

Poznámka:

Riešenie úlohy b) možno priamo zovšeobecniť na dôkaz vety o obvodovom a stredovom uhle. Riešenie úlohy c) zas ukazuje, že v tetivovom štvoruholníku je súčet veľkostí protiľahlých uhlov rovný 180°.

N2 Štvoruholník je tetivový práve vtedy, keď súčet jeho protiľahlých uhlov je 180°.

Riešenie:

Dôkaz je možno nájsť napr. na str. 20 (Veta 5) v spomínanej knihe *Kružnice*.

N3 Dokážte, že oblúkom rovnakej dĺžky tej istej kružnice prislúchajú obvodové uhly rovnakej veľkosti.

Riešenie:

Označme stred kružnice S a krajné body uvažovaných oblúkov A a B. resp. C a D. Keďže tieto oblúky majú rovnakú dĺžku, prislúchajú im zhodné stredové uhly ASB a CSD. Z rovnosti stredových uhlov tak vyplýva aj rovnosť obvodových uhlov.

N4 Označme S stred toho oblúka s krajnými bodmi B a C kružnice opísanej trojuholníku ABC, ktorý neobsahuje bod A. Dokážte, že AS je osou uhla BAC.

Riešenie:

Oblúky s krajnými bodmi B a S, resp. S a C sú rovnako dlhé, preto im prislúchajú rovnaké obvodové uhly BAS a CAS.

N5 Dve zhodné kružnice k a l sa pretínajú v bodoch A a B. Na kružnici k zvolíme bod C a na kružnici l bod D tak, aby bod A bol vnútorným bodom úsečky CD. Dokážte, že $|BC| = |BD|$.

Riešenie:

Uhly ACB a ADB sú obvodové uhly prislúchajúce dlhšiemu oblúku s krajnými bodmi A a B zhodných kružníc k a l, preto sú rovnako veľké, z čoho priamo vyplýva $|BC| = |BD|$.

N6 Nech trojuholník ABC má pravým uhol pri vrchole B. Označme I stred kružnice do neho vpísanej a M stred prepony AC. Predpokladajme, že body B, I, M, C ležia na jednej kružnici. Určte veľkosť uhla BAC.

Riešenie:

60°.

Ide o zjednodušenú úlohu 72-B-I-6 (https://skmo.sk/dokument.php?id=4362#page=7).

D1 Dokážte, že stredy kružníc zvonka pripísaných k jednotlivým stranám ľubovoľného konvexného štvoruholníka ležia na jednej kružnici.

Riešenie:

69-B-S-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3391#page=2).

D2 Nech D je ľubovoľný vnútorný bod strany AB trojuholníka ABC. Na polpriamkach BC a AC zvoľme postupne body E a F tak, aby platilo $|BD| = |BE|$ a $|AD| = |AF|$. Dokážte, že body C, E, F a stred I kružnice vpísanej do trojuholníka ABC ležia na jednej kružnici.

Riešenie:

63-B-I-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=1008#page=3).

D3 Nech ABC je ostrouhlý trojuholník a D, E, F ABC päty jeho výšok postupne na strany AB, BC, CA. Obraz bodu F v stredovej súmernosti podla stredu strany AB leží na priamke DE. Určte veľkosť uhla BAC.

Riešenie:

57-A-II-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=214#page=3).

D4 Nech ABC je pravouhlý trojuholník. Na jeho prepone BC ležia body D a E také, že $|CD| = |CA|$ a $|BE| = |BA|$.

Nech F je taký vnútorný bod trojuholníka ABC, že DEF je pravouhlý rovnoramenný trojuholník s preponou DE. Aká je veľkosť uhla BFC?

Riešenie:

68-A-II-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3041#page=4).

D5 Nech $ABCD$ je kosoštvorec s kratšou uhlopriečkou BD a E vnútorný bod jeho strany CD, ktorý leží na kružnici opísanej trojuholníku ABD. Určte veľkosť jeho uhla pri vrchole DAB, ak majú kružnice opísané trojuholníkom ACD a BCE práve jeden spoločný bod.

Riešenie:

67-B-I-3 (https://skmo.sk/dokument.php?id=2578#page=3).

6

Návodné úlohy N1 až N3 sú zamerané na úpravy výrazov na *štvorce*, čím myslíme druhé mocniny mnohočlenov (v našom prípade dvojčlenov). Takéto úpravy sú často kľúčovými pri dokazovaní nerovností či hľadaní extrémov výrazov, čo si môžete vyskúšať v úlohách N4 a N9. Úloha N7 upozorňuje na nesprávne riešenie úlohy N5, ktorá je podobná aj samotnej súťažnej úlohe. Úloha N8 naznačuje, ako možno túto nesprávnu úvahu opraviť.

N1 Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a a b platí $a^2 + b^2 \geq 2ab$, pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $a = b$.

Riešenie:

Dokazovanú nerovnosť ekvivalentne upravíme na $(a - b)^2 \geq 0$.

N2 Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c platí $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, pričom rovnosť nastáva práve v prípade $a = b = c$.

Riešenie 1:

Ekvivalentné úpravy začínajúce sa vynásobením 2 vedúce k nerovnosti $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$, pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď sú všetky zátvorky 0, t. j. keď $a = b = c$.

Riešenie 2:

Sčítame nerovnosti $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$, $c^2 + a^2 \geq 2ca$ a vydelíme 2.

N3 Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c platí

a) $5a^2 + 6b^2 + 7c^2 \geq 4ab + 6ac + 8bc$;
b) $3a^2 + 3b^2 + 8c^2 \geq 4(ab + ac + bc)$;
c) $5a^2 + 5b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 4ac + 4bc$.

Určte všetky trojice čísel (a, b, c), pre ktoré nastáva v jednotlivých prípadoch rovnosť.

Riešenie:

a) Nerovnosť získame súčtom nerovností $2a^2 + 2b^2 \geq 4ab$, $3a^2 + 3c^2 \geq 6ac$, $4b^2 + 4c^2 \geq 8bc$, ktoré sme získali vynásobením nerovnosti z úlohy N1 vhodnými konštantami. Rovnosť musí nastať vo všetkých troch nerovnostiach, z čoho máme $a = b = c$.
b) Sčítame nerovnosti $2a^2 + 2b^2 \geq 4ab$, $a^2 + (2c)^2 \geq 4ac$, $b^2 + (2c)^2 \geq 4bc$. Rovnosť nastáva v prípade $a = b = 2c$.
c) Sčítame nerovnosti $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $4a^2 + c^2 \geq 4ac$, $4b^2 + c^2 \geq 4bc$. Rovnosť nastáva v prípade $a = b = c/2$. Všetky tri nerovnosti možno tiež dokázať úpravou na $2(a-b)^2 + 3(a-c)^2 + 4(b-c)^2 \geq 0$, $2(a - b)^2 + (a - 2c)^2 + (b - 2c)^2 \geq 0$, resp. $(a - b)^2 + (2a - c)^2 + (2b - c)^2 \geq 0$.

N4 Kladné reálne čísla x a y sú také, že $xy \geq 2$. Akú najmenšiu hodnotu môže nadobudnúť výraz $4x^2 + 9y^2$?

Riešenie:

Platí $4x^2 + 9y^2 = (2x - 3y)^2 + 12xy \geq 12xy \geq 24$. Túto hodnotu dostaneme, práve keď $2x = 3y$ a $xy = 2$, t. j. ekvivalentne $x = \sqrt{3}$ a $y = 2/\sqrt{3}$.

N5 Nezáporné reálne čísla x, y, z sú také, že $x + y \geq 6$, $z + x \geq 8$, $y + z \geq 10$. Akú najmenšiu hodnotu môže nadobudnúť výraz $x^2 + y^2 + z^2$?

Riešenie:

Ak $z > 8$, tak $x^2 + y^2 + z^2 \geq z^2 > 64$.

Ak $z \leq 8$, tak čísla $8 - z$ a $10 - z$ sú nezáporné, preto platí $x^2 + y^2 + z^2 \geq (8 - z)^2 + (10 - z)^2 + z^2 = 3(z - 6)^2 + 56 \geq 56$. Hodnota 56 je menšia ako v prípade $z > 8$ a je dosiahnutá v prípade $(x, y, z) = (2, 4, 6)$ (je to dokonca jediný prípad). Preto 56 je hľadaná najmenšia hodnota.

Ukážeme ešte jeden spôsob, ako dokázať nerovnosť $x^2 + y^2 + z^2 \geq 56$, na ktorom ilustrujeme viaceré užitočné myšlienky. Budeme sa opierať o hypotézu, že najmenšiu hodnotu bude výraz nadobúdať v prípade $(x, y, z) = (2, 4, 6)$. (K tejto hypotéze možno dojsť na základe skúšania rôznych hodnôt.) Budeme vychádzať z nerovnosti $a^2 + b^2 \geq 2ab$ z úlohy N1. Na ľavej strane chceme dostať nejaké z výrazov x^2, y^2, z^2 a na pravej strane nejaké z výrazov x, y, z. To dostaneme, ak do nerovnosti z úlohy N1 dosadíme jednu premennú a jednu konštantu. Ak dosadíme premennú x, tak chceme zvoliť konštantu 2, aby rovnosť nastávala v prípade $x = 2$ ako v našej hypotéze. Tak dostaneme, že platí nerovnosť $x^2 + 2^2 \geq 4x$. Podobne platí aj $y^2 + 4^2 \geq 8y$ a $z^2 + 6^2 \geq 12z$. Sčítaním týchto troch nerovností dostaneme $x^2 + y^2 + z^2 \geq 4x + 8y + 12z - 56$. Na dokončenie dôkazu nám stačí vhodne odhadnúť hodnotu výrazu $4x + 8y + 12z$, na čo môžeme využiť nerovnosti zo zadania. Konkrétne platí $4x+8y+12z-56 = 4(z+x)+8(y+z)-56 \geq 4\cdot 8+8\cdot 10-56 = 56$, čím je dôkaz ukončený.

Ešte vysvetlíme, ako sme prišli k úprave $4x + 8y + 12z = 4(z + x) + 8(y + z)$. Vo všeobecnosti chceme nájsť také konštanty a, b, c, že bude platiť $4x + 8y + 12z = a(x + y) + b(z + x) + c(y + z)$. Po roznásobení a porovnaní koeficientov pri x, y, z dostaneme, že musí platiť $a + b = 4$, $c + a = 8$, $b + c = 12$. Vyriešením tejto sústavy dostaneme, že $(a, b, c) = (0, 4, 8)$.

N6 Nezáporné reálne čísla x, y, z sú také, že $x + y \geq 4$, $z + x \geq 8$, $y + z \geq 10$. Akú najmenšiu hodnotu môže nadobudnúť výraz $x^2 + y^2 + z^2$?

Riešenie:

56.

Úlohu možno riešiť rovnako ako predošlú.

N7 Rozhodnite, či je nasledovné riešenie úlohy N5 úplné a korektné: Keďže chceme dostať čo najmenšiu hodnotu výrazu $x^2+y^2+z^2$, tak chceme, aby aj výrazy $x+y$, $z+x$, $y+z$ nadobúdali čo najmenšie hodnoty, teda aby v nerovnostiach zo zadania bola rovnosť. Dostávame tak sústavu troch rovníc $x+y = 6$, $z+x = 8$, $y+z = 10$, z čoho $(x, y, z) = (2, 4, 6)$. Najmenšia hodnota je teda dosiahnutá pri tomto riešení a je to $2^2 + 4^2 + 6^2$ čiže 56.

Riešenie:

Riešenie nie je správne, lebo neobsahuje dôkaz, že pri iných voľbách čísel nemôžeme dostať hodnotu výrazu menšiu ako 56.

To, že takáto úvaha nie je korektná, možno vidieť, keď ju použijeme na riešenie úlohy N6. Vtedy dostaneme sústavu $x+y = 4$, $z+x = 8$, $y+z = 10$, z ktorej $(x, y, z) = (1, 3, 7)$, a vtedy $x^2+y^2+z^2 = 1^2+3^2+7^2 = 59$. Avšak najmenšia možná hodnota je stále 56, pretože sme v riešení úlohy N5 nerovnosť $x + y \geq 6$ nevyužili.

N8 Dokážte, že pri riešení úlohy N5 sa stačí obmedziť na trojice (x, y, z) také, že platia aspoň dve z rovností $x + y = 6$, $z + x = 8$, $y + z = 10$.

Riešenie:

Na začiatok uvedieme, že v prípade $(x, y, z) = (2, 4, 6)$ nadobúda výraz hodnotu 56 a sú splnené všetky tri rovnosti. Vezmime si trojicu (x, y, z) takú, že platí najviac jedna z uvedených rovností. Vyriešime prípad, kedy $x + y > 6$ a $z + x > 8$, zvyšné dva prípady sú analogické. Nech $x' = \max(6 - y, 8 - z)$. Ak x' nie je kladné, tak platí $y \geq 6$ a $z \geq 6$. Skúmaný výraz má tak hodnotu aspoň $6^2 + 8^2$ čiže 100, čo je viac ako hodnota 56 v prípade $(x, y, z) = (2, 4, 6)$. V opačnom prípade je x' kladné, platí $x' + y \geq 6$ a $z + x' \geq 8$ a aspoň v jednej z nerovností nastáva rovnosť. Avšak $x' < x$, teda hodnotu výrazu sme tým zmenšili a zvýšili počet dosiahnutých rovností. Ak aj po tejto úprave platí najviac jedna z rovností, tak ju vieme ešte raz zopakovať. Preto pre každú trojicu (x, y, z), pre ktorú sa dosahuje rovnosť v najviac jednej z nerovností, má výraz väčšiu hodnotu ako pre niektorú trojicu s aspoň dvomi dosiahnutými rovnosťami.

N9 Nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu $9x^2 + 36/x^2$, ak

a) $x \in (0, \infty)$;

b) $x \in (0, 1]$;

c) $x \in [2, \infty)$;

Riešenie:

Výraz možno „doplniť na štvorec" takto: $9x^2 + 36/x^2 = (3x - 6/x)^2 + 36 \geq 36$. Rovnosť dosiahneme práve v prípade $3x - 6/x = 0$, t. j.$x = \sqrt{2}$, pričom $\sqrt{2} \in (0, \infty)$. Tým sme ukázali, že 36 je najmenšia hodnota výrazu v časti a).

Hodnota výrazu $(3x - 6/x)^2$ na intervale $(0, \infty)$., To vyplýva z toho, že ak $0 < x_1 < x_2$, tak nerovnosť $3x_1 - 6/x_1 < 3x_2 - 6/x_2$ je ekvivalentná nerovnosti $0 < (x_2 - x_1)(3 + 6/(x_1x_2))$. Výraz $3x - 6/x$ nadobúda nulovú hodnotu v prípade $x = \sqrt{2}$. Na intervale $(0, \sqrt{2}]$, a teda aj na intervale $(0, 1]$, je výraz rastúci a záporný, preto jeho druhá mocnina $(3x - 6/x)^2$ je klesajúca. Najmenšiu možnú hodnotu výrazu pre časť b) tak dostaneme v prípade $x = 2$, čo zodpovedá hodnote 45.

Analogicky, na intervale $[2, \infty)$ v časti c) je výraz $3x - 6/x$ kladný a rastúci, teda aj jeho druhá mocnina bude kladná a rastúca. Najmenšiu možnú hodnotu výrazu tak získame v prípade $x = 2$, čo zodpovedá hodnote 45.

D1 Dokážte, že pre ľubovoľné dve nezáporné reálne čísla x a y platí nerovnosť

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy},$$

pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x = y$.

(Tejto nerovnosti sa hovorí nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom a platí aj pre viac ako dve čísla, teda nerovnosť $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ platí pre ľubovoľných n nezáporných reálnych čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$.)

Riešenie:

Keďže na oboch stranách sú nezáporné čísla, nerovnosť je ekvivalentná nerovnosti $(x+y)^2/4 \geq xy$, a tá zas nerovnosti $(x-y)^2 \geq 0$.

D2 Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla k a m je funkcia f, kde $f(x) = kx - m/x$ na intervale $(0, \infty)$ rastúca.

Riešenie:

Funkcia g, kde $g(x) = kx$, je všade rastúca a funkcia h, kde $h(x) = -m/x$, je rastúca na intervale $(0, \infty)$. Skúmaná funkcia f je teda súčet dvoch na tomto intervale rastúcich funkcií, takže aj ona je tam rastúca.

Iným riešením je ukázať, že ak $0 < x_1 < x_2$, tak platí $kx_1 - m/x_1 < kx_2 - m/x_2$, pretože táto nerovnosť je ekvivalentná nerovnosti $(x_1 - x_2)\,(k + m/(x_1 x_2)) < 0$, čo v našom prípade zrejme platí.

D3 Nech k a m sú kladné reálne čísla a f je funkcia taká, že $f(x) = kx^2 + m/x^2$ pre každé kladné reálne číslo x. Nech $M = \sqrt[4]{m/k}$. Dokážte, že funkcia f nadobúda v M minimum, na intervale $(0, M]$ je klesajúca a na intervale $[M, \infty)$ je rastúca.

Riešenie:

Ide o všeobecnú verziu úlohy N9. Predpis funkcie doplníme na štvorec: $f(x) = (\sqrt{k} \cdot x - \sqrt{m}/x)^2 + 2\sqrt{km}$. Výraz v zátvorke je podľa úlohy D2 rastúci a nadobúda hodnotu 0 práve v M. Preto je výraz v zátvorke pre x z $(0, M]$ záporný, takže jeho absolútna hodnota, a teda aj druhá mocnina, klesá. Pre x z $[M, \infty)$ je zas kladný. Preto f na intervale $(0, M]$ klesá a na intervale $[M, \infty)$ rastie.

D4 Nech k a m sú kladné reálne čísla a f je funkcia taká, že $f(x) = kx^2 + m/x$ pre každé kladné reálne číslo x. Nech $M = \sqrt{m/k}$. Dokážte, že funkcia f nadobúda v M minimum, na intervale $(0, M]$ je klesajúca a na intervale $[M, \infty)$ je rastúca.

Riešenie:

Podobne ako v predošlej úlohe riešenie vyplýva z úpravy $f(x) = (\sqrt{kx} - \sqrt{m/x})^2 + 2\sqrt{km}$. Dôkaz, že výraz $\sqrt{kx} - \sqrt{m/x}$ rastie, je podobný dôkazu v úlohe D2.

D5 Určte najmenšiu hodnotu výrazu $x^2 + \frac{2}{1+2x^2}$, kde x je ľubovolné reálne číslo. Pre ktoré x túto hodnotu nadobúda?

Riešenie:

64-B-II-2 (https://skmo.sk/dokument.php?id=1371#page=2).

D6 Nech a a b sú nezáporné reálne čísla také, že $a + b = 2$. Určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu výrazu $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$.

Riešenie:

68-B-II-1 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3125).

D7 Nech a a b sú nezáporné reálne čísla také, že $a^2 + b^2 = 1$. Určte najmenšiu aj najväčšiu možnú hodnotu výrazu $\frac{a^4+b^4+ab+1}{a+b}$.

Riešenie:

68-B-I-4 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3042#page=6).

D8 Nech a a b sú reálne čísla také, že $a - b \geq 2$. Určte najmenšiu možnú hodnotu výrazu $a^4 + b^4$.

Riešenie:

Hľadaná najmenšia hodnota je 2, dosiahneme ju v prípade $(a, b) = (1, -1)$.

Poznámka:

Dôkaz nerovnosti $a^4 + b^4 \geq 2$ je možné nájsť v riešení 3. úlohy 1. letného kola KMS 2012/2013 (https://old.kms.sk/docs/vzoraky/20122013/let/seria1.pdf?s=1&t=let&r=2012#page=2).

D9 Nájdite maximálnu hodnotu výrazu $a^2 + b^2 + c^2$, kde a, b, c sú reálne čísla také, že všetky tri čísla $a + b$, $b + c$, $c + a$ sú z intervalu $[0, 1]$.

Riešenie:

68-A-II-4 (https://skmo.sk/dokument.php?id=3041#page=8).

D10 Súčet 74 (nie nutne rôznych) reálnych čísel z uzavretého intervalu $[4, 10]$ je 356. Určte najväčšiu možnú hodnotu súčtu ich druhých mocnín.

Riešenie:

73-A-II-4 (https://skmo.sk/dokument.php?id=4892#page=4).

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Vydal: NIVaM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava, 2024