2022/2023
72. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh MEMO*

(*Súťaž sa konala 21. – 27. 8. 2023.*)

Súťaž jednotlivcov:

I-1. Nech $\mathbb{R}$ označuje množinu všetkých reálnych čísel. Pre všetky dvojice (α, β) nezáporných reálnych čísel, pre ktoré $\alpha + \beta \geqq 2$, nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spĺňajúce

$$f(x)f(y) \leqq f(xy) + \alpha x + \beta y$$

pre všetky reálne čísla x, y. (*Walther Janous, Rakúsko*)

I-2. Nájdite všetky celé čísla $n \geqq 3$, pre ktoré možno nakresliť n tetív jednej kružnice tak, že všetkých ich $2n$ koncových bodov je navzájom rôznych a každá tetiva pretína práve k iných tetív, pre
a) $k = n - 2$,
b) $k = n - 3$.

Poznámka. Tetiva kružnice je úsečka, ktorej oba koncové body ležia na danej kružnici.
(*Josef Tkadlec, ČR*)

I-3. Nech ABC je trojuholník s vpísanou kružnicou ω so stredom v bode I. Kružnica ω sa dotýka strany BC v bode D. Označme E, F body spĺňajúce $AI \parallel BE \parallel CF$ a $|\measuredangle BEI| = |\measuredangle CFI| = 90°$. Priamky DE a DF pretínajú druhýkrát kružnicu ω postupne v bodoch E' a F'. Dokážte, že $E'F' \perp AI$. (*Patrik Bak, Slovensko*)

I-4. Nech n, m sú kladné celé čísla. Množinu kladných celých čísel S nazývame (n, m)-*dobrá*, ak spĺňa nasledovné tri podmienky:
(i) Platí $m \in S$.
(ii) Pre každé číslo $a \in S$ patria do S aj všetky jeho kladné delitele.
(iii) Pre všetky navzájom rôzne čísla $a, b \in S$ platí $a^n + b^n \in S$.
Nájdite všetky dvojice (n, m), pre ktoré je množina všetkých kladných celých čísel jedinou (n, m)-dobrou množinou. (*Michael Reitmeir, Rakúsko*)

Súťaž družstiev:

T-1. Nech $\mathbb{Z}$ označuje množinu všetkých celých čísel a $\mathbb{Z}_{>0}$ množinu všetkých kladných celých čísel.
a) Funkcia $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sa nazýva $\mathbb{Z}$-*ilinská*, pokiaľ spĺňa $f(a^2 + b) = f(b^2 + a)$ pre všetky $a, b \in \mathbb{Z}$. Určte najväčší možný počet navzájom rôznych čísel, ktoré sa môžu nachádzať medzi $f(1), f(2), \ldots, f(2023)$, kde f je $\mathbb{Z}$-ilinská funkcia.
b) Funkcia $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ sa nazýva $\mathbb{Z}_{>0}$-*ilinská*, pokiaľ spĺňa $f(a^2 + b) = f(b^2 + a)$ pre všetky $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$. Určte najväčší možný počet navzájom rôznych čísel, ktoré sa môžu nachádzať medzi $f(1), f(2), \ldots, f(2023)$, kde f je $\mathbb{Z}_{>0}$-ilinská funkcia.
(*Josef Tkadlec, ČR*)

T-2. Nech a, b, c, d sú kladné reálne čísla spĺňajúce $abcd = 1$. Dokážte, že

$$\frac{ab+1}{a+1} + \frac{bc+1}{b+1} + \frac{cd+1}{c+1} + \frac{da+1}{d+1} \geqq 4$$

a nájdite všetky štvorice (a, b, c, d), pre ktoré nastáva rovnosť. (*Walther Janous, Rakúsko*)

T-3. Nájdite najmenšie celé číslo b s nasledujúcou vlastnosťou: Pre každé ofarbenie práve b políčok na šachovnici rozmerov 8×8 na zeleno je možné umiestniť 7 strelcov na 7 zelených políčok tak, aby sa žiadni dvaja strelci neohrozovali.

Poznámka. Dvaja strelci sa ohrozujú, ak sa nachádzajú na rovnakej diagonále.

(*Jozef Rajník, Slovensko*)

T-4. Nech $c \geqq 4$ je párne celé číslo. V Slovenskej futbalovej lige má každý klub domáci a hosťovský dres. Každý domáci dres je ofarbený dvomi rôznymi farbami, kým každý hosťovský dres je ofarbený jednou farbou. Farba hosťovského dresu klubu sa musí líšiť od oboch farieb jeho domáceho dresu. Na všetkých dresoch dokopy je nanajvýš c rôznych farieb. Ak majú dva tímy rovnaké obe farby na ich domácich dresoch, potom majú rôzne farby na ich hosťovských dresoch.

Hovoríme, že pár dresov *sa bije*, ak sa nejaká farba vyskytuje na oboch dresoch. Predpokladajme, že pre každý tím X v lige platí, že neexistuje v lige tím Y taký, že domáci dres tímu X sa bije s oboma dresmi tímu Y. Nájdite najväčší možný počet tímov v lige.

(*Ivan Novak, Chorvátsko*)

T-5. Majme konvexný štvoruholník $ABCD$, ktorého uhly nie sú pravé. Predpokladajme, že body P, Q, R, S ležia postupne na jeho stranách AB, BC, CD, DA tak, že platí $PS \parallel BD$, $SQ \perp BC$, $PR \perp CD$. Navyše predpokladajme, že sa priamky PR, SQ, AC pretínajú v jednom bode. Dokážte, že body P, Q, R, S ležia na jednej kružnici. (*Patrik Bak, Slovensko*)

T-6. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník, kde $|AB| < |AC|$. Nech J je stred kružnice pripísanej k strane BC a D kolmý priemet bodu J na stranu BC. Osi uhlov BDJ a JDC pretínajú priamky BJ a JC postupne v bodoch X a Y. Úsečky XY a JD sa pretínajú v bode P. Nech Q je kolmý priemet bodu A na priamku BC. Dokážte, že os uhla QAP je kolmá na priamku XY.

Poznámka. Kružnica pripísaná k strane BC trojuholníka ABC je kružnica mimo trojuholníka, ktorá sa dotýka priamok AB, AC a úsečky BC. (*Dominik Burek, Poľsko*)

T-7. Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré existujú kladné celé čísla $a > b$ spĺňajúce

$$n = \frac{4ab}{a-b}.$$

(*Josef Tkadlec, ČR*)

T-8. Nech A a B sú kladné celé čísla. Uvažujme postupnosť kladných celých čísel $(x_n)_{n\geqq 1}$ takú, že

$$x_{n+1} = A \cdot \gcd(x_n, x_{n-1}) + B \quad \text{pre všetky } n \geqq 2.$$

Dokážte, že táto postupnosť dosahuje len konečne veľa rôznych hodnôt.

Poznámka. Zápis $\gcd(a, b)$ značí najväčšieho spoločného deliteľa kladných celých čísel a, b.

(*Ivan Novak, Chorvátsko*)