2023/2024
73. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh MEMO*

(*Súťaž sa konala 24. – 30. 8. 2024.*)

Súťaž jednotlivcov:

I-1. Určte všetky $k \in \mathbb{N}_0$, pre ktoré existuje funkcia $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ taká, že $f(2024) = k$ a

$$f(f(n)) \leqq f(n+1) - f(n)$$

platí pre všetky $n \in \mathbb{N}_0$.

Poznámka. Symbolom $\mathbb{N}_0$ značíme množinu nezáporných celých čísel. (*Rakúsko*)

I-2. Na nekonečnej tabuli sa nachádza list papiera (taký ako tento). Marvin si tajne zvolí konvexný 2024-uholník, ktorý sa nachádza celý na papieri. Tigrica chce nájsť vrcholy 2024-uholníka P. V každom kroku Tigrica narysuje na tabuľu priamku g, ktorá je celá mimo papier, potom Marvin odpovie priamkou h rovnobežnou s priamkou g, ktorá je zo všetkých rovnobežných priamok prechádzajúcich aspoň jedným vrcholom 2024-uholníka P najbližšie k priamke g. Dokážte, že existuje kladné celé číslo n také, že Tigrica vie vždy nájsť vrcholy 2024-uholníka P za najviac n krokoch. (*Maďarsko*)

I-3. Nech ABC je ostrouhlý rôznostranný trojuholník. Zvoľme kružnicu ω prechádzajúcu bodmi B a C, ktorá pretne druhýkrát úsečky AB a AC postupne v bodoch $D \neq A$ a $E \neq A$. Nech F je priesečník priamok BE a CD. Nech G je bod na kružnici opísanej trojuholníku ABF taký, že GB je dotyčnicou kružnice ω. Podobne, nech H je bod na kružnici opísanej trojuholníku ACF taký, že HC je dotyčnicou kružnice ω. Dokážte, že existuje taký bod $T \neq A$, ktorý nezávisí na voľbe kružnice ω, že kružnica opísaná trojuholníku AGH prechádza bodom T. (*Patrik Bak, Slovensko*)

I-4. Pre ľubovoľné kladné celé číslo n označme $\sigma(n)$ súčet kladných deliteľov čísla n. Určte všetky mnohočleny $P(x)$ s celočíselnými koeficientmi také, že $P(k)$ je deliteľné číslom $\sigma(k)$ pre všetky kladné celé čísla k. (*Rakúsko*)

Súťaž družstiev:

T-1. Uvažujme dve nekonečné postupnosti reálnych čísel $a_0, a_1, a_2, \ldots$ a $b_0, b_1, b_2, \ldots$ také, že $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ a

$$a_{k+1} = b_k, \qquad b_{k+1} = \frac{a_k b_k + a_k + 1}{b_k + 1}$$

pre každé celé číslo $k \geqq 0$. Dokážte, že platí $a_{2024} + b_{2024} \geqq 88$.

(*Marián Poturnay, Slovensko*)

T-2. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že

$$yf(x+1) = f(x + y - f(x)) + f(x)f(f(y))$$

platí pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$. (*Chorvátsko*)

T-3. Na brehu rieky Tisa sedí v rade 2024 matematikov. Každý z nich pracuje na práve jednej výskumnej téme, pričom ak dvaja matematici pracujú na rovnakej téme, tak na nej pracujú aj všetci matematici sediaci medzi nimi.

Marvin chce zistiť pre každú dvojicu matematikov, či pracujú na rovnakej téme. Môže sa spýtať ľubovoľného matematika nasledovnú otázku „Koľko z týchto 2024 matematikov pracuje na tvojej téme?" Marvin sa pýta otázky postupne, takže kým sa spýta ďalšiu otázku, tak vie odpovede na všetky predošlé otázky.

Určte najmenšie kladné celé číslo k také, že Marvin vie splniť svoj cieľ za použitia najviac k otázok. (*Maďarsko*)

T-4. Konečná postupnosť $x_1, x_2, \ldots, x_r$ kladných celých čísel je *palindróm*, ak platí $x_i = x_{r+1-i}$ pre všetky celé čísla $1 \leqq i \leqq r$.

Nech $a_1, a_2, \ldots$ je nekonečná postupnosť kladných celých čísel. Pre kladné celé číslo $j \geqq 2$ označme $a[j]$ konečnú podpostupnosť $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}$. Predpokladajme, že existuje (rýdzo) rastúca nekonečná postupnosť $b_1, b_2, \ldots$ kladných celých čísel taká, že pre každé kladné celé číslo n je podpostupnosť $a[b_n]$ palindróm a platí $b_{n+2} \leqq b_{n+1} + b_n$. Dokážte, že existuje kladné celé číslo T také, že platí $a_i = a_{i+T}$ pre každé kladné celé číslo i. (*Chorvátsko*)

T-5. Nech ABC je trojuholník, pre ktorý platí $|\measuredangle BAC| = 60°$. Nech D je bod na priamke AC taký, že platí $|AB| = |AD|$, pričom A leží medzi C a D. Predpokladajme, že na kružnici opísanej trojuholníku DBC ležia body $E \neq F$ také, že platí $|AE| = |AF| = |BC|$. Dokážte, že priamka EF prechádza stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC. (*Marián Poturnay, Slovensko*)

T-6. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník. Nech M je stred úsečky BC. Nech I, J, K sú postupne stredy kružníc vpísaných trojuholníkom ABC, ABM, ACM. Nech P, Q sú body postupne na priamkach MK, MJ také, že platí $|\measuredangle AJP| = |\measuredangle ABC|$ a $|\measuredangle AKQ| = |\measuredangle BCA|$. Nech R je priesečník priamok CP a BQ. Dokážte, že priamky IR a BC sú na seba kolmé. (*Michal Pecho, Slovensko*)

T-7. *Zlepenie* kladných celých čísel prebieha tak, že ich zápisy v desiatkovej sústave zapíšeme postupne za sebou a výsledok interpretujeme ako zápis jedného kladného celého čísla v desiatkovej sústave.

Nájdite všetky kladné celé čísla k, pre ktoré existuje celé číslo N_k s nasledovnou vlastnosťou: pre všetky $n \geqq N_k$ možno v nejakom poradí zlepiť čísla $1, 2, \ldots, n$ tak, aby výsledné číslo bolo deliteľné číslom k.

Poznámka. Zápis v desiatkovej sústave sa nemôže začínať nulou.

Príklad. Zlepením čísel 15, 14, 7 v tomto poradí získame číslo 15 147.

(*Patrik Bak, Slovensko*)

T-8. Nech k je kladné celé číslo a nech $a_1, a_2, \ldots$ je nekonečná postupnosť kladných celých čísel taká, že platí

$$a_i a_{i+1} \mid k - a_i^2$$

pre všetky celé čísla $i \geqq 1$. Dokážte, že existuje kladné celé číslo M také, že platí $a_n = a_{n+1}$ pre všetky celé čísla $n \geqq M$. (*Chorvátsko*)