

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Zadania úloh domáceho kola kategórie A (maďarská verzia)

1 Legyenek a és b olyan valós számok amelyekre az $a^2 + b$ és $b^2 + a$ kifejezések ugyanazt az értéket veszik fel. Mekkora a lehető legkisebb ilyen érték?

(Patrik Bak)

2 Dobókockákat, amelyek egyformák úgy nagyságban, mint a számok elhelyezkedésében egymáshoz rakunk a lapjaik mentén úgy, hogy egy tetszőleges oldalhosszúságú négyzetet alkossanak, s az érintkező oldallapok ugyanazt a számot tartalmazzák. Legfeljebb hány különböző szám fordulhat elő a kockák felső lapján?

(Martin Panák, Josef Tkadlec)

3 Keressük meg azt a lehető legnagyobb 2024 összegű különböző természetes számok számát, amelyre a válogatásban szereplő legkisebb természetes számon kívül mindegyikre fennáll, hogy többszöröse a válogatásban szereplő tőle kisebb természetes számok összegének!

(Patrik Bak)

4 Adott az ABC háromszög, amelyben $|AB| = 13$, $|BC| = 14$, $|CA| = 15$. Ennek egység-hosszúságú vektor szerinti eltolásával keletkezik az $A'B'C'$ háromszög. Határozzuk meg az ABC és $A'B'C'$ metszetének lehető legkisebb területét!

(Tomáš Bárta)

5 Samu egy végtelenül magas felhőkarcoló földszintjén egy különleges liftbe szállt be. Ebben a liftben a nyomógombok 0, 1, 2 stb. Az első gombnyomásra a lift felfelé megy, ezután minden gombnyomás után irányt vált. A k gomb megnyomására mindig 2^k emelettel halad az utolsó mozgással ellentétes irányba. Ezenkívül minden megnyomott gomb száma kisebb kell legyen az előzőnél. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n természetes számra Samu pontosan két különböző módon tud eljutni az n -edik emeletre!

(Morteza Saghafian)

6 Jelölje rendre J, K, L az ABC háromszögben a BC, CA, AB oldalakhoz hozzáírt körök középpontját! Legyenek X, Y, Z rendre a JBC, KCA, LAB háromszögek magasságpontjai! Bizonyítsuk be, hogy az ABC és XYZ háromszögek egybevágóak!

(Michal Janík)

Termín odovzdania riešení: **3. 12. 2024**

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Vydal: NIVaM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava, 2024