
MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Zadania úloh domáceho kola kategórie B (maďarská verzia)

1 Az 1-től 9-ig terjedő számjegyek felhasználásával alkotunk egy különböző számjegyekből álló kilencjegyű számot. Ezután minden egymás mellett elhelyezkedő két számjegyét egy kétjegyű számnak tekintünk s felírjuk a legkisebb prímosztóját. Kaphatunk-e így pontosan két különböző prímszámot? Ha igen, akkor határozzuk meg az összes ilyen prímszám párt!

(Patrik Bak)

2 Adott az ABC háromszög, amelyben $|\sphericalangle BAC| = 45^\circ$. Az AB ill. AC oldalakhoz kívülről hozzáírjuk azokat az ABP ill. ACQ egyenlőszárú derékszögű háromszögeket, melynek átfogói AB ill. AC . Jelölje R a PQ szakasz középpontját. Bizonyítsuk be, hogy az AR szakasz hossza fele az ABC háromszög köré írt kör sugarának!

(Patrik Bak, Anastasia Bredichina)

3 Melyek azok az n természetes számok, amelyekre az n oldalhosszúságú egyenlő oldalú háromszög feldarabolható egybevágó konvex alakzatokra, amelyek

a) 2,

b) 3

darab egységnyi oldalhosszúságú egyenlő oldalú háromszögekből állnak?

(Pavel Calábek, Jaroslav Švrček)

4 a) Keressünk példát olyan kétjegyű n természetes számra, melyre az $1/n$ szám legrövidebb tízes számrendszerbeli alakja pontosan két számjegyet tartalmaz a tizedesvessző után!

b) Bizonyítsuk be, hogy bármely két pozitív természetes k és l számra létezik pontosan két pozitív racionális szám, melyeknek legrövidebb tízes számrendszerbeli alakjuk pontosan k számjegyet tartalmaz a tizedesvessző után, a fordított értékük pedig pontosan l számjegyet!

(Josef Tkadlec)

5 Egy hegyesszögű ABC háromszög körülírt körét jelölje k . Ezen körnek a BC tengely általi tükrözésben vett tükörképe a BA ill. CA félegyenesekkel ellentétes félegyeneseket a B ill. C pontoktól különböző D ill. E pontokban metszi. Tegyük fel, hogy a CD és BE szakaszok metszéspontja a k körre illeszkedik. Határozzuk meg a BAC szög összes lehetséges nagyságát!

(Patrik Bak)

6 Legyenek x, y, z olyan pozitív valós számok, amelyekre $xy \geq 2, zx \geq 3, yz \geq 6$. Melyik az a legkisebb érték amelyet felvehet a $13x^2 + 10y^2 + 5z^2$ kifejezés?

(Patrik Bak)

Termín odovzdania riešení: **23. 1. 2024**
