MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Návodné a doplňujúce úlohy k úlohám domáceho kola kategórie Z9

1

N1 Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla a, b, d platí:

a) Ak d delí a a b, tak d delí aj $a + b$ a $a - b$.

a) Ak d delí a a b, tak d delí aj $11a + 13b$.

Riešenie:

Podľa predpokladu platí $a = k \cdot d$ a $b = l \cdot d$ pre nejaké prirodzené čísla k a l, teda $a + b = (k + l) \cdot d$, $a - b = (k - l) \cdot d$ a $11a + 13b = (11k + 13l) \cdot d$.

N2 Rozhodnite, či platí, že ak a a $2a + 3b$ sú čísla deliteľné 5, tak aj b je deliteľné 5.

Riešenie:

Ak 5 delí čísla a a $2a + 3b$, tak delí aj číslo $3b$: Podľa predpokladu totiž platí $a = 5k$ a $2a + 3b = 5l$ pre nejaké čísla k a l, teda $3b = 5l - 2a = 5(l - 2k)$. Keďže 3 a 5 sú nesúdeliteľné čísla, b je deliteľné 5. Uvedené tvrdenie teda platí.

N3 Nájdite všetky prvočísla p také, že $\frac{p}{2} + 2p$ je prvočíslo.

Riešenie:

Ako p, tak aj $\frac{p}{2} + 2p$ je celé číslo, teda i $\frac{p}{2}$ je celé. Jediné párne prvočíslo je 2, teda $p = 2$ a $\frac{p}{2} + 2p = 5$, čo je tiež prvočíslo. Úloha má jediné riešenie 2.

D1 Po delení čísla a číslom 53 dostaneme zvyšok 3 a po delení čísla b číslom 53 dostaneme zvyšok 2. Aký zvyšok dostaneme po delení čísla $4a + 5b$ číslom 53?

Riešenie:

Podľa predpokladu platí $a = 53k + 3$ a $b = 53l + 2$ pre nejaké čísla k a l. Odtiaľ dostávame $4a + 5b = 4(53k + 3) + 5(53l + 2) = 53(4k + 5l) + 22$. Hľadaný zvyšok je 22.

D2 Rozhodnite, pre ktoré prirodzené čísla k je číslo Pre ľubovoľné prirodzené číslo k uvažujte súčet po sebe idúcich čísel

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (6k + 3) + (6k + 4) + (6k + 5)$$

deliteľný 2, 3, 4, 5, resp. 6.

Riešenie:

Túto hodnotu označme s. Zápis navádza na rozdelenie do skupín po 6 sčítancoch, každú skupinu sčítame a ďalej upravíme:

$$\begin{aligned} s &= (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5) + (6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11) + \cdots \\ &\quad + (6k + (6k + 1) + (6k + 2) + (6k + 3) + (6k + 4) + (6k + 5)) \\ &= 15 + (36 + 15) + \cdots + (36k + 15) = 15(k + 1) + 36(1 + \cdots + k) \\ &= 15(k + 1) + 36 \cdot \frac{k(k + 1)}{2} = 15(k + 1) + 18k(k + 1) = 3(k + 1)(5 + 6k). \end{aligned}$$

Z posledného vyjadrenia vyvodzujeme, že platí:

- s je deliteľné 3 pre ľubovoľné k.
- s je deliteľné 2, práve keď $k + 1$ je deliteľné 2, t. j. keď k je nepárne.
- s je deliteľné 6, práve keď k je nepárne.
- s je deliteľné 4, práve keď $k + 1$ je deliteľné 4, t. j. keď k dáva po delení 4 zvyšok 3.
- s je deliteľné 5, práve keď $(k + 1)(5 + 6k)$ je deliteľné 5, t. j. keď $k + 1$ alebo $5 + 6k$ je deliteľné 5, t. j. keď $k + 1$ alebo $6k$ je deliteľné 5, t. j. keď $k + 1$ alebo k je deliteľné 5.

2

N1 Pravidelný štvorboký hranol má podstavnú hranu dlhú 3 cm a výšku 5 cm. Vypočítajte objem hranola a obsah jeho plášťa.

Riešenie:

Objem hranola je 45 cm^3, obsah plášťa je 60 cm^2.

N2 Určte veľkosť uhlopriečky obdĺžnika so stranami dĺžok 4 cm a 9 cm.

Riešenie:

Podľa Pytagorovej vety je dĺžka uhlopriečky $\sqrt{(4\text{ cm})^2 + (9\text{ cm})^2}$ čiže $\sqrt{97}$ cm, čo je približne 9,85 cm.

N3 Pravidelný štvorboký hranol má telesovú uhlopriečku dĺžky $\sqrt{86}$ cm a výšku 6 cm. Určte objem hranola.

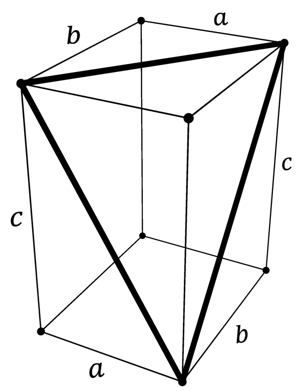
Riešenie:

Telesová uhlopriečka, výška a podstavná uhlopriečka tvoria pravouhlý trojuholník. Rovnako aj podstavná uhlopriečka s podstavnými hranami. Ak dvakrát použijeme Pytagorovu vetu, dostávame, že dĺžka podstavnej hrany je 5 cm, takže objem hranola je $(5\text{ cm})^2 \cdot 6\text{ cm}$ čiže 150 cm^3.

D1 Vyjadrite pomocou dĺžok hrán kvádra dĺžky jeho stenových uhlopriečok a ukážte, že nimi určený trojuholník nie je pravouhlý.

Riešenie:

Rozmery kvádra označme a, b, c. Jeho stenové uhlopriečky majú podľa Pytagorovej vety dĺžky $\sqrt{c^2 + a^2}$, $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{b^2 + c^2}$. Ak by bol nimi tvorený trojuholník pravouhlý a napr. posledná strana bola preponou, tak by platilo $(c^2 + a^2) + (a^2 + b^2) = b^2 + c^2$, t. j. $2a^2 = 0$. To však nie je možné, pretože $a > 0$. Podobne vylúčime ostatné dva prípady.



D2 Vyjadrite pomocou n počet stenových a počet telesových uhlopriečok pravidelného n-bokého hranola.

Riešenie:

Z každého z n vrcholov jednej podstavy vedie telesová uhlopriečka do každého z $n - 3$ vrcholov druhej podstavy, s ktorými neleží v tej istej stene. Teda telesových uhlopriečok je $n(n-3)$. Pri pohľade zhora telesové uhlopriečky splývajú s uhlopriečkami podstáv, pričom za každým priemetom sú dve telesové a dve podstavné uhlopriečky. Podstavných uhlopriečok je preto rovnako veľa ako telesových. V každej z n bočných stien sú dve uhlopriečky, teda stenových uhlopriečok je spolu $n(n - 3) + 2n$ čiže $n(n - 1)$.

3

N1 9-prvková množina je rozdelená do 6 neprázdnych podmnožín. Koľko najviac prvkov môže mať najväčšia z týchto podmnožín?

Riešenie:

5 neprázdnych podmnožín obsahuje spolu najmenej 5 prvkov, na šiestu množinu ostávajú najviac 4 prvky.

N2 Vypíšte všetky dvojprvkové množiny tvorené nesúdeliteľnými deliteľmi čísla 24.

Riešenie:

Delitele čísla 24 sú 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 a 24. Nesúdeliteľné dvojice sú $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 6\}$, $\{1, 8\}$, $\{1, 12\}$, $\{1, 24\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 8\}$.

N3 Najmenej koľko množín potrebujeme na rozdelenie všetkých deliteľov čísla 100 tak, aby čísla v každej množine boli po dvoch nesúdeliteľné?

Riešenie:

Číslo 100 má 6 párnych deliteľov a 3 nepárne. Menej ako 6 množín teda nestačí, ale 6 áno: $\{1, 2, 5\}$, $\{4, 25\}$, $\{10\}$, $\{20\}$, $\{50\}$, $\{100\}$.

N4 Ktoré prirodzené čísla majú iba nesúdeliteľné dvojice deliteľov?

Riešenie:

Ak má číslo vlastného deliteľa iného ako 1, tak tento deliteľ spolu s daným číslom tvoria dvojicu súdeliteľných deliteľov. Čísla s uvedenou vlastnosťou sú teda práve prvočísla.

D1 Dokážte, že ak má číslo aspoň jedného párneho deliteľa, tak je aspoň polovica všetkých jeho deliteľov párnych.

Riešenie:

Čísla s párnym deliteľom sú párne, pretože nepárne čísla majú iba nepárne delitele. Ak má párne číslo nepárneho deliteľa d, tak aj číslo $2d$ je jeho deliteľom. Teda párnych deliteľov je aspoň toľko ako nepárnych.

4

N1 Aký môže byť najmenší a aký najväčší ciferný súčet kladného prirodzeného čísla, ktoré má

a) 2 cifry;
b) 3 cifry;
c) n cifier?

Riešenie:

Najmenší ciferný súčet je vo všetkých prípadoch 1, a to pre čísla s prvou cifrou 1 a ostatnými 0.

Najväčší ciferný súčet je postupne 18, 27 a $9n$, a to pre čísla tvorené samými 9.

N2 Pripočítajte k číslu 74 jednociferné číslo tak, aby ciferný súčet výsledného čísla bol

a) menší
b) rovnaký

ako ciferný súčet čísla 74. Nájdite všetky možnosti.

Riešenie:

Pokiaľ pripočítaním nedôjde k prechodu cez desiatku, ciferný súčet sa zväčší. Vyhovujúce možnosti sú:

a) 6, 7 alebo 8;
b) 9.

N3 Nájdite všetky trojciferné čísla, ktorých ciferný súčet sa po pripočítaní 1 zmenší. Určte príslušné poklesy.

Riešenie:

Ciferný súčet se zmenší pre čísla končiace cifrou 9. Pre čísla tvaru $**9$, kde $*$ značí číslice iné ako 98, sa ciferný súčet zmenší o 8, pre čísla tvaru $*99$ sa ciferný súčet zmenší o 17, pre číslo 999 sa ciferný súčet zmenší o 26.

D1 Jana si vymyslela 2022-ciferné číslo a jeho ciferný súčet pošepkala Petrovi. Peter vypočítal ciferný súčet čísla, ktoré mu povedala Jana, a výsledok pošepkal Zuzke. Zuzka tiež vypočítala ciferný súčet čísla, ktoré dostala od Petra, a výsledok, ktorý bol dvojciferný, pošepkala Adamovi. Adam urobil to isté s číslom od Zuzky a vyšiel mu ciferný súčet 1. Aké čísla mohol pošepkať Peter Zuzke? Určte všetky možnosti.

Riešenie:

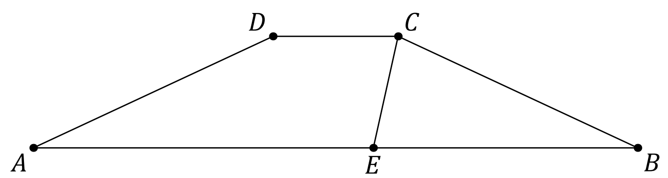
MO, 71. ročník, Z9-I-2 (https://www.skmo.sk/dokument.php?id=3923).

5

N1 Je daný rovnoramenný lichobežník $ABCD$ so základňami AB a CD. Bod E je priesečníkom strany AB s osou uhla BCD. Veľkosť uhla DAB je 25°. Vypočítajte veľkosti uhlov štvoruholníka $AECD$.

Riešenie:

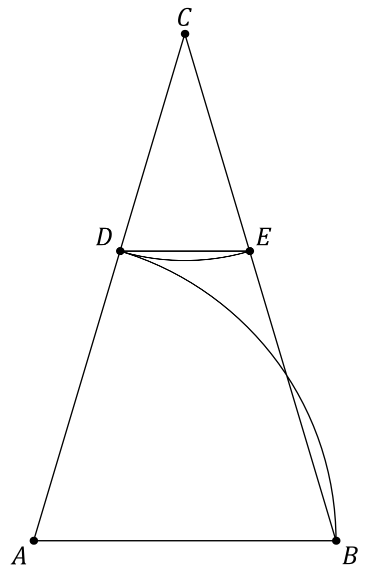
Z rovnobežnosti AB a CD vyplýva $|\sphericalangle CDA| = 180° - 25° = 155°$. To je zároveň veľkosť uhla BCD, teda $|\sphericalangle ECD| = 155°/2 = 77{,}5°$. Zo súčtu uhlov štvoruholníka $AECD$ dostávame $|\sphericalangle AEC| = 360° - |\sphericalangle ECD| - |\sphericalangle CDA| - |\sphericalangle DAE| = 102{,}5°$.



N2 Je daný rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB, kde $|AB| = 4$ cm a $|AC| = 7$ cm. Kružnica so stredom A prechádzajúca bodom B pretína stranu AC v bode D. Kružnica so stredom C prechádzajúca bodom D pretína stranu BC v bode E. Určte obvod trojuholníka DEC.

Riešenie:

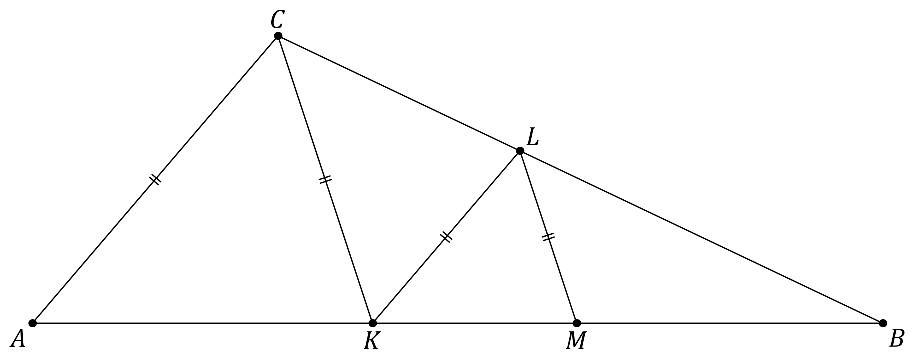
Body D a E ležia na kružnici so stredom C, teda trojuholník DEC je rovnoramenný so základňou DE. Trojuholníky DEC a ABC sú rovnoľahlé so stredom C a koeficientom $\frac{|DC|}{|AC|}$, t. j. $\frac{3}{7}$, lebo $|DC| = |AC| - |AD| = |AC| - |AB| = 7\text{ cm} - 4\text{ cm} = 3$ cm. V rovnakom pomere sú aj obvody trojuholníkov DEC a ABC. Obvod trojuholníka ABC je $4\text{ cm} + 2 \cdot 7$ cm čiže 18 cm, obvod trojuholníka DEC je $\frac{3}{7} \cdot 18$ cm čiže $\frac{54}{7}$ cm, čo je približne 7,71 cm.



N3 V trojuholníku ABC sú na strane AB body K, M, na strane BC je bod L a platí $AC \parallel KL$, $CK \parallel LM$, $|AC| = 5$ cm, $|CK| = 4$ cm, $|KL| = 3$ cm. Určte dĺžku úsečky LM.

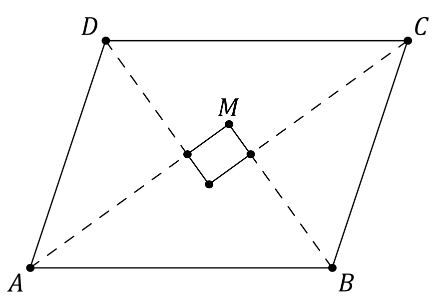
Riešenie:

Vďaka rovnobežnosti AC s KL a CK s LM sú trojuholníky AKC a KML rovnoľahlé so stredom B. Pomery zodpovedajúcich strán sú preto rovnaké, takže $\frac{|AC|}{|CK|} = \frac{|KL|}{|LM|}$. Po dosadení a úprave dostávame $|LM| = \frac{12}{5}$ cm $=$ 2,4 cm.



D1 Osi vnútorných uhlov rovnobežníka $ABCD$ ohraničujú štvoruholník. Vyjadrite veľkosti jeho uhlov pomocou veľkostí uhlov $ABCD$.

Riešenie:



Pretože $ABCD$ je rovnobežník, je súmerný podľa svojho stredu, sú podľa tohto stredu súmerné aj osi jeho protiľahlých uhlov. Ohraničený štvoruholník je teda rovnobežník. Nech M je priesečník osí uhlov DAB a ABC. Potom

$$|\sphericalangle AMB| = 180^\circ - |\sphericalangle MAB| - |\sphericalangle MBA| = 180^\circ - \frac{1}{2}|\sphericalangle DAB| - \frac{1}{2}|\sphericalangle ABC|$$

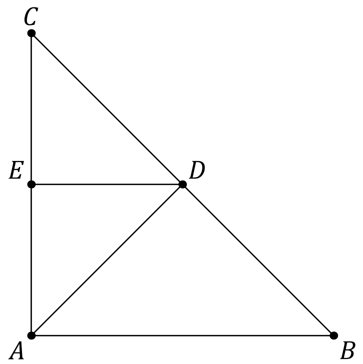
$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle ABC|) = 180^\circ - \frac{1}{2}\cdot 180^\circ = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Jeden z uhlov ohraničeného rovnobežníka je teda pravý, ide teda o obdĺžnik. Pravé sú preto všetky jeho uhly.

D2 V trojuholníku ABC pretína os uhla BAC stranu BC v bode D a os uhla ADC pretína stranu AC v bode E. Trojuholníky ABD a DCE sú podobné a strana AB meria 10 cm. Určte obvod trojuholníka ABC.

Riešenie:

Z podobnosti trojuholníkov ABD a DCE vyplýva zhodnosť uhlov ABD a DCE, teda trojuholník ABC je rovnoramenný so základňou BC. Preto je os AD kolmá na BC, čiže uhol CDA je pravý. Z tejto podobnosti ďalej plynie zhodnosť uhlov BAD a CDE, teda aj ich dvojnásobkov BAC a CDA. Preto je aj uhol BAC pravý a trojuholník ABC je pravouhlý. Veľkosti jeho strán AC a AB sú 10 cm a podľa Pytagorovej vety $|BC| = 10\sqrt{2}$ cm. Hľadaný obvod je teda 10 cm + 10 cm + $10\sqrt{2}$ cm čiže $10\left(2+\sqrt{2}\right)$ cm.



6

N1 Králici Pečienka, Fašírka, Rezeň a Guláš súťažili v skoku do diaľky. Pečienka skočila o 15 cm ďalej ako Fašírka, ktorá skočila o 20 cm menej ako Guláš. Rezeň skočil 273 cm, teda o 110 cm ďalej ako Pečienka. Určte dĺžky skokov všetkých králikov a ich výsledné poradie.

Riešenie:

MO, 70. ročník, úloha Z6-I-1 (https://www.skmo.sk/dokument.php?id=3599).

N2 Mohol byť bazén zo súťažnej úlohy dlhý 13 metrov?

Riešenie:

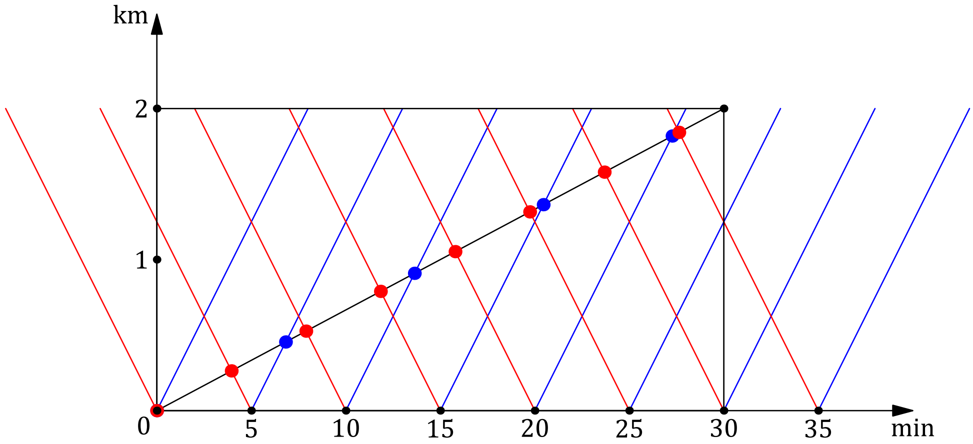
Predpokladajme, že bazén má 13 m, a označme t čas prvého míňania sa plavcov. V čase t boli 5 m od Kaprovej štartovacej strany, pričom Kapor preplával 5 m a Pstruh 8 m. V čase $2t$ preplával Kapor ďalších 5 m a Pstruh ďalších 8 m, teda od Kaprovej strany bol Kapor 10 m a Pstruh po obrátke 3 m. V čase $3t$ pridal každý opäť svoju vzdialenosť a míňali sa 11 m od Kaprovej strany. Druhýkrát sa však mali míňať 5 m od Kaprovej strany, teda bazén nemohol merať 13 m.

N3 Medzi dvoma zastávkami vzdialenými 2 km jazdia trolejbusy každých 5 minút, a to v oboch smeroch rýchlosťou 15 km/h. Jurko šiel pozdĺž trasy trolejbusu rýchlosťou 4 km/h. Keď vychádzal od prvej zastávky, práve sa tu míňali dva protiidúce trolejbusy. Koľko trolejbusov Jurko stretol cestou k druhej zastávke?

Riešenie:

Trolejbusy prejdú trasu medzi zastávkami za $\frac{2}{15}$ h čiže 8 min, Jurko ju prejde za $\frac{2}{4}$ h čiže 30 min. V smere svojho pohybu Jurko stretol všetky trolejbusy, ktoré z prvej zastávky vyšli najneskôr 22. minútu jeho pohybu na trase, a tých bolo 5 (vyšli v minútach 0, 5, 10, 15, 20). Proti smeru svojho pohybu stretol všetky trolejbusy, ktoré do prvej zastávky došli najneskôr 38. minútu jeho pohybu na trase, a tých bolo 8 (došli v minútach 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35). Jurko stretol spolu 13 trolejbusov.

Názorne je všetko zachytené v nasledujúcom grafe. Šikmá čierna zodpovedá Jurkovmu pohybu, modré čiary trolejbusom, ktoré ho predbiehali, a červené trolejbusom, ktoré šli oproti nemu.



D1 Z mesta A do mesta B vyráža súčasne dodávka a kamión a v rovnakom čase oproti nim z B do A vyráža motorka. Rýchlosti dodávky, kamiónu a motorky sú postupne 90 km/h, 40 km/h a 100 km/h. Vzdialenosť miest A a B je 300 km. Za ako dlho bude dodávka vzdialená rovnako od kamiónu aj od motorky?

Riešenie:

Za čas t meraný v hodinách sa vozidlá nachádzajú vo vzdialenostiach $t \cdot 90\,\mathrm{km/h}$, $t \cdot 40\,\mathrm{km/h}$, resp. $300\,\mathrm{km} - t \cdot 100\,\mathrm{km/h}$ od mesta A. Situácia zo zadania nastane dvakrát. Prvýkrát v čase t_1, predtým, ako sa stretne motorka s dodávkou: Z rovnosti vzdialeností dodávky od kamiónu a dodávky od motorky

$$t_1 \cdot 90\,\mathrm{km/h} - t_1 \cdot 40\,\mathrm{km/h} = (300\,\mathrm{km} - t_1 \cdot 100\,\mathrm{km/h}) - t_1 \cdot 90\,\mathrm{km/h},$$

odkiaľ $t_1 = \frac{5}{4}$ h. Druhýkrát nastane v čase t_2, keď sa motorka míňa s kamiónom: Z rovností vzdialeností kamiónu a motorky od mesta A

$$t_2 \cdot 40\,\mathrm{km/h} = 300\,\mathrm{km} - t_2 \cdot 100\,\mathrm{km/h},$$

odkiaľ $t_2 = \frac{15}{7}$ h.

D2 Poľovník ide rýchlosťou 4 km/h. Keď sa nachádza 1 km od horárne, pustí psa, ktorý behá rýchlosťou 10 km/h. Pes plný radosti beží k horárni, pri horárni sa rýchlo otočí a beží naspäť k poľovníkovi. Pri ňom sa opäť otočí a beží k horárni, od nej zasa k poľovníkovi a tak ďalej. Koľko kilometrov pes nabehá, kým obaja dorazia do horárne?

Riešenie:

Stačí sa zamerať na čas: Poľovník prejde 1 km k horárni za $\frac{1}{4}$ h. Pes celý tento čas bežal a ubehol $10\,\mathrm{km/h} \cdot \frac{1}{4}$ h čiže 2,5 km.

Slovenská komisia Matematickej olympiády
Vydal: NIVaM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava, 2024