MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2024/2025

Návodné a doplňujúce úlohy
k úlohám domáceho kola kategórie Z8

1

N1 Alica, Božena a Daniela zbierajú mušle, dokopy ich majú 34. Keby mala Alica o 2 menej, Božena o 3 viac a Daniela o tretinu menej ako teraz, mali by všetky rovnako. Koľko mušlí má každé dievča?

Riešenie:

Alica 12, Božena 7 a Daniela 15.

N2 Pri oslave 39. narodenín pani Záhadnej sa jej kamarátka spýtala na vek jej troch detí. Pani Záhadná odpovedala: „Keď sčítam vek najstaršieho s polovicou veku najmladšieho a štvrtinou veku prostredného, dostanem tretinu svojho veku.“. Koľko rokov môžu mať jej deti? Uveďte všetky možnosti.

Riešenie:

Deti mohli mať 2, 4 a 11 rokov alebo 2, 8 a 10 rokov alebo 4, 8 a 9 rokov.

N3 Súrodenci Adam a Eva chodia na základnú školu, Adam je o dva roky mladší ako Eva. Keď k trojnásobku Evinho veku pripočítali 5 a výsledok vydelili vekom Adama, vyšlo im rovnaké číslo ako počet babičkiných mačiek. Koľko mačiek má babička?

Riešenie:

Babička má 4 mačky, Adam má 11 rokov a Eva 13 rokov.

D1 Kamaráti Jaro, Pavol a Rasťo hrali guľôčky. Jarovi sa veľmi nedarilo, takže po hre mal zo všetkých najmenej guľôčok. Chlapcom to bolo ľúto, preto dal Rasťo Jarovi polovicu všetkých svojich guľôčok a Pavol tretinu tých svojich. Teraz mal najviac guľôčok Jaro, a tak svojim kamarátom vrátil každému 7 guľôčok. Po týchto výmenách mali všetci rovnako, a to 25 guľôčok. Koľko guľôčok mal po hre (pred výmenami) Jaro?

Riešenie:

MO, 73. ročník, Z6-I-1 (https://www.skmo.sk/dokument.php?id=4926).

2

N1 Trojuholník zo súťažnej úlohy rozdeľte na štyri zhodné trojuholníky.

Riešenie:

Zakreslením stredných priečok trojuholníka vznikne pri každom vrchole menší trojuholník a v strede vznikne štvrtý trojuholník. Všetky tieto trojuholníky sú zhodné.

N2 Trojuholník zo súťažnej úlohy rozdeľte na štyri trojuholníky, ktoré nie sú všetky zhodné, ale majú zhodný obsah.

Riešenie:

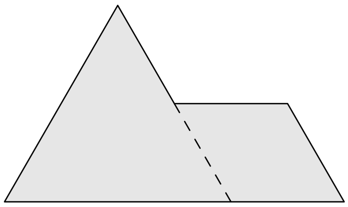
Asi najjednoduchšie riešenie získame rozdelením základne na štvrtiny a spojením novovzniknutých bodov s vrcholom neležiacim na základni.

N3 Rozdeľte pravidelný šesťuholník na tri zhodné kosoštvorce.

Riešenie:

Pravidelný šesťuholník je možné rozdeliť na šesť zhodných rovnostranných trojuholníkov, každé dva susedné tvoria kosoštvorec.

D1 Klára mala štyri zhodné dieliky z tvrdého papiera, ktoré jej pripomínali sfingu. Každý dielik bol zlepený z rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky 6 cm a kosoštvorca so stranou dĺžky 3 cm. Klára tieto štyri dieliky prikladala k sebe, až sa jej podarilo zložiť podobný, ale väčší tvar sfingy. Nakreslite, ako to mohla urobiť. (Dieliky sa neprekrývali, neboli nijako ohnuté, ale mohli byť preklopené spodnou stranou hore.)



Riešenie:

Pôvodná malá sfinga má základňu dlhú 6 cm + 3 cm čiže 9 cm a dá sa rozdeliť na 6 menších rovnostranných trojuholníkov so stranou 3 cm. To znamená, že väčšia sfinga bude mať základňu 18 cm a bude sa dať rozdeliť na $6 \cdot 4$ čiže 24 trojuholníčkov so stranou 3 cm. Ak do veľkej sfingy dokreslíme malé trojuholníčky, ľahko sa už dá nájsť jej delenie na malé sfingy.

3

N1 Nájdite všetky prirodzené čísla menšie ako 30, ktoré po delení 3 dávajú zvyšok 2. Aké zvyšky dávajú tieto čísla po delení 6? A aké po delení 9?

Riešenie:

Ide o čísla 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26 a 29. Po delení 6 dávajú tieto čísla zvyšky 2 alebo 5, po delení 9 sú to zvyšky 2, 5 alebo 8.

N1 Nech $a = 2024$ a $b = 111$. Aké zvyšky po delení 3, 4 a 5 dávajú čísla a, b, $a + b$ a $a - b$?

Riešenie:

Po delení 3 dáva a zvyšok 2, b zvyšok 0, $a + b$ zvyšok 2 a $a - b$ zvyšok 2. Po delení 4 dáva a zvyšok 0, b zvyšok 3, $a + b$ zvyšok 3 a $a - b$ zvyšok 1. Po delení 5 dáva a zvyšok 4, b zvyšok 1, $a + b$ zvyšok 0 a $a - b$ zvyšok 3.

N1 Moje obľúbené číslo je súčtom čísla, ktoré po delení 4 dáva zvyšok 1, a čísla, ktoré po delení 8 dáva zvyšok 3. Aké zvyšky môžu vyjsť po delení môjho obľúbeného čísla číslom 8?

Riešenie:

Zvyšok po delení 8 môže byť 4 alebo 0.

D1 Nájdite všetky dvojciferné čísla, ktoré sú deliteľné 4, po delení 6 dávajú zvyšok 2 a po delení 5 dávajú zvyšok 3.

Riešenie:

Vyhovuje jediné dvojciferné číslo, a to 68.

D2 Aký zvyšok po delení 3 dáva súčet prvých 2024 kladných prirodzených čísel?

Riešenie:

Súčet je deliteľný 3, takže zvyšok je 0.

4

N1 V pravidelnom päťuholníku $ABCDE$ je bod P priesečníkom priamok AC a BE. Určte veľkosť uhla EPC.

Riešenie:

Veľkosť uhla EPC je 108°.

N2 V pravidelnom šesťuholníku $ABCDEF$ je bod Q priesečníkom priamok FD a AE. Určte veľkosť uhla AQD.

Riešenie:

Veľkosť uhla AQD je 120°.

N3 V pravidelnom šesťuholníku $ABCDEF$ je bod R priesečníkom priamok FA a BD. Určte veľkosti uhlov ARB a RBC.

Riešenie:

Veľkosť uhla ARB je 30°, veľkosť uhla EBC je 150°.

D1 V pravidelnom 180-uholníku $A_1A_2 \dots A_{180}$ je bod V priesečníkom priamok A_1A_3 a A_2A_4. Určte veľkosti uhlov $A_1A_3A_2$ a A_1VA_4.

Riešenie:

Veľkosť uhla $A_1A_3A_2$ je 1°, veľkosť uhla A_1VA_4 je 178°.

5

N1 Určte všetky dvojice kladných jednociferných čísel, ktoré majú jednociferný najmenší spoločný násobok.

Riešenie:

Riešením sú dvojice $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,6)$, $(1,7)$, $(1,8)$, $(1,9)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,6)$, $(2,8)$, $(3,3)$, $(3,6)$, $(3,9)$, $(4,4)$, $(4,8)$, $(5,5)$, $(6,6)$, $(7,7)$, $(8,8)$ a $(9,9)$.

N2 Určte všetky dvojice čísel, pre ktoré je súčin ich najmenšieho spoločného násobku a najväčšieho spoločného deliteľa rovný 75.

Riešenie:

Riešením sú dvojice $(1,75)$, $(3,25)$ a $(5,15)$.

N3 Nech $a = 60$ a $b = 48$. Určte ich najväčší spoločný deliteľ D čísel a a b, ich najmenší spoločný násobok N a overte, že platí $a \cdot b = D \cdot N$. Rozhodnite, či takýto vzťah platí pre ľubovoľné kladné prirodzené čísla a a b.

Riešenie:

Daná rovnosť platí pre všetky kladné prirodzené čísla a a b.

N4 Určte všetky možné dvojice prirodzených čísel také, že podiel ich najmenšieho spoločného násobku a najväčšieho spoločného deliteľa je 6 a ich súčet je menší ako 20.

Riešenie:

Možné dvojice sú $(6,1)$, $(2,3)$, $(12,2)$, $(4,6)$ a $(6,9)$ a dvojice s vymenenými zložkami.

D1 Určte všetky možné trojice rôznych prirodzených čísel také, že podiel ich najmenšieho spoločného násobku a najväčšieho spoločného deliteľa je 30 a súčet každých dvoch z nich je väčší ako 10 a menší ako 30.

Riešenie:

$(6,9,15)$, $(8,12,20)$, $(2,10,12)$, $(3,15,18)$, $(3,9,30)$, $(6,9,30)$, $(6,15,18)$ a ich permutácie.

6

N1 Rybár Kapor choval vo svojom rybníku pleskáče. Na jar prikúpil polovicu množstva pleskáčov, ktoré v rybníku mal, a k tomu dostal 20 pleskáčov od majiteľa vedľajšieho rybníka. Na jeseň po výlove zostalo v rybníku 182 pleskáčov, čo bolo o 30 percent menej ako po jarnom navýšení chovu. Koľko pleskáčov mal pán Kapor na začiatku?

Riešenie:

Na začiatku mal pán Kapor 160 pleskáčov.

N2 Šťuka naháňa a žerie malé ryby v rybníku. V utorok a v stredu zjedla o štvrtinu viac rýb ako v predchádzajúci deň, vo štvrtok a v piatok zjedla o 20 % viac rýb ako v predchádzajúci deň a v piatok zjedla 36 rýb. Koľko rýb zjedla šťuka v pondelok? Ktorý deň mala zjedenú práve polovicu všetkých rýb, ktoré zjedla od pondelka do piatku?

Riešenie:

V pondelok zjedla 16 rýb, polovicu rýb zjedla vo štvrtok.

N3 Rybár Platesa ulovil 15 rýb a zobral ich všetky na trh. Každá z týchto rýb vážila aspoň 500 gramov, ale žiadna neválila viac ako 3 kilogramy. Počas dňa si ľudia kupovali veľké ryby a večer išiel rybár domov s najmenšími kúskami zo svojho úlovku. Dokopy nepredané ryby vážili pätinu toho, čo ranný úlovok. Koľko najmenej a koľko najviac rýb mohol pán Platesa predať?

Riešenie:

Rybár Platesa predal najmenej 6 a najviac 11 rýb.

D1 Do predajne vína sa v noci dostal kocúr. Vyskočil na policu, na ktorej boli v dlhom rade vyrovnané fľaše s vínom – prvá tretina fliaš skraja stála po 8 eur, nasledujúca tretina fliaš stála po 6,5 eur a posledná tretina po 5 eur. Najprv kocúr zhodil na zem fľašu za 8 eur, ktorá stála úplne na začiatku radu, a potom postupoval ďalej a zhadzoval bez vynechania jednu fľašu za druhou. Než ho to prestalo baviť, zhodil 25 fliaš a tie sa všetky rozbili. Ráno majiteľ ľutoval, že kocúr nezačal so zhadzovaním na druhom okraji police. Aj keby totiž rozbil rovnako veľa fliaš, bola by škoda o 33 eur nižšia. Koľko fliaš bolo pôvodne na polici?

Riešenie:

MO, 59. ročník, Z7-I-1 (https://www.skmo.sk/dokument.php?id=322).

Slovenská komisia Matematickej olympiády
Vydal: NIVaM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže, Bratislava, 2024